3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１２６０１

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2014～2018

課題番号：２６２８７００２

研究課題名（和文）導来圏の安定性条件とDonaldson-Thomas不変量の研究

研究課題名（英文）Stability conditions on derived categories and Donaldson-Thomas invariants

研究代表者

戸田　幸伸（Toda, Yukinobu）

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・教授

研究者番号：２０５０３８８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　12,300,000円

研究成果の概要（和文）：３次元カラビヤウ多様体上の連接層の導来圏上の安定性条件について研究し、半安定対象のモジュライ空間を構成した。これを用いて、３次元カラビヤウ多様体上の安定層や曲線を数え上げるDonaldson-Thomas不変量の研究に応用を与えた。また３次元及び４次元カラビヤウ多様体上の１次元層を数え上げるGopakumar-Vafa不変量の数学的定義を与え、Donaldson-Thomas不変量との明示的な関係を予想し、様々な場合に予想を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
３次元カラビヤウ多様体は物理学の超弦理論においても考察される数学的対象であり、特にこの上のGopakumar-Vafa不変量は物理学者のGopakumarとVafaによって提唱された重要な不変量である。よってその不変量の数学的に厳密な定義を与える事は数学・物理双方にとって意義深いものである。Maulik氏との共同研究でGopakumar-Vafa不変量の数学的定義を与えることに成功し、この不変量の更なる理解を深めることができた。

研究成果の概要（英文）：We studied stability conditions on derived categories of coherent sheaves on Calabi-Yau 3-folds, and constructed moduli spaces of semistable objects. We applied this result to the study of Donaldson-Thomas invariants which count stable sheaves or curves on Calabi-Yau 3-folds. Moreover we gave mathematical definitions of Gopakumar-Vafa invariants on Calabi-Yau 3-folds and 4-folds, described conjectural relationships with Donaldson-Thomas invariants explicitly, and proved them in several cases.

研究分野：代数幾何学

キーワード：連接層の導来圏　安定性条件　Donaldson-Thomas不変量　Gopakumar-Vafa不変量

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

代数多様体上の連接層の導来圏の研究はミラー対称性や双有理幾何学と密接に関わる重要な研究課題である。特に３次元カラビヤウ多様体は物理学における超弦理論とも関わるため、その上の連接層の導来圏の研究は特に重要なものである。2002 年頃 Bridgeland は導来圏の安定性条件の概念を導入し、安定性条件のなす空間がミラー多様体の複素構造のモジュライ空間と関係すると予想した。その後 Bridgeland 安定性条件は多くの注目を集め、様々な研究成果が得られてきた。しかし、Bridgeland が導入した定義を満たす安定性条件を実際に構成することは多くの場合で困難であり、特に３次元カラビヤウ多様体上で Bridgeland 安定性条件を構成することは一つの大きな課題であった。

一方、Thomas は 1998 年頃に３次元カラビヤウ多様体上の安定層を数え上げる不変量を導入した。彼が導入した不変量は現在では Donaldson-Thomas (DT) 不変量と呼ばれる。Maulik-Nekrasov-Okounkov-Pandharipande は 2003 年に階数が 1 の安定層を数え上げる DT 不変量と曲線を数え上げる Gromov-Witten 不変量が等価であると予想した。彼らの予想（MNOP 予想）は今後の DT 不変量の研究の指針を与える事となった。

私は 2008 年頃から安定性条件の概念を改変した弱安定性条件の概念を導入し、その壁越え現象を解析することで MNOP 予想に関わる DT 不変量の生成関数の様々な性質を証明してきた。例えば MNOP によって階数が 1 の DT 不変量の生成関数を McMahon 関数で割ったものは有理関数であると予想されていたが、この予想は上述の弱安定性条件を用いて証明されたものである。 他にも DT/PT 対応予想や DT 不変量のフロップ変換公式などといった応用を見出してきた。

研究開始当初、上述の弱安定性条件を応用した DT 不変量の研究についての進展が一段落した状態であった。今後更なる応用を与えるためには、弱安定性条件ではなく本来の Bridgeland 安定性条件を用いる必要があった。３次元代数多様体上の Bridgeland 安定性条件の存在問題については Bayer-Macri-戸田によるある種の２項複体の Chern 数に関する Bogomolov-Gieseker (BG)型不等式予想に帰着されており、これは大きな未解決問題であった。また BG 型不等式予想を満たす３次元カラビヤウ多様体に対して、本来の Bridgeland 安定性を用いて DT 不変量の隠された性質を見出すことも重要な研究課題であった。

２．研究の目的

代数多様体上の連接層の導来圏の Bridgeland 安定性条件の空間を調べ、DT 不変量への応用を与える事が目的である。特に 3 次元射影的代数多様体上の安定性条件の研究は Bayer-Macri-戸田による BG 型不等式予想と密接に関わるため、この予想の研究が第一目的である。BG 型不等式予想が成立するならば安定対象のモジュライ空間を考察することができるため、Bridgeland 安定対象を数え上げる DT 不変量の理論の基礎付けを与える事も問題となる。上述の基礎付けを与え、これを通じて DT 不変量の間の非自明な関係式を確立する。具体的には導来圏の自己同値が与えられると DT 不変量の間に何らかの関係式が得られると期待している。DT 不変量の生成関数は様々な場合である種の保型性が存在すると考えられており、その様な保型性予想を Bridgeland 安定性条件と導来同値によってアプローチすることも目的である。

３．研究の方法

Bridgeland 安定性条件の存在問題については BG 型不等式予想に対して様々な観点からアプローチする。５次超曲面など具体的な３次元カラビヤウ多様体に限定したり、正標数還元の手法を試みる。DT 不変量への応用については、例えば３次元アーベル多様体については Bridgeland 安定性条件の存在が知られているため、この場合に自己同値が誘導する DT 不変量の関係式を見出す。この場合は Pandharipande らによって DT 不変量の生成関数がある種の保型性を持つと予想されており、上述の関係式との関係を見出す。代数曲面上の標準束の全空間で与えられる非コンパクトな３次元カラビヤウ多様体に対しても Bridgeland 安定性条件の存在が知られている場合があるため、その場合にも同様のアプローチを行う。

４．研究成果

第一目標としていた BG 型不等式予想の研究については、Chunyi-Li 氏によって５次超曲面で予想が成立するという論文が発表された。本研究課題においては, BG 型不等式予想以外に以下に述べる様々な関連する研究結果が得られた。

（１）　３次元代数多様体上の Bridgeland 安定対象のモジュライ空間の研究

Dulip Piyaratne 氏との共同研究で、Bayer-Macri-戸田の BG 型不等式予想を満たす射影的３次元代数多様体の Bridgeland 半安定対象のモジュライ空間が有限型のモジュライスタックとして実現されることを証明した。この結果を用いて、BG 型不等式予想を満たす３次元カラビヤウ多様体上の Bridgeland 半安定対象を数え上げる DT 型不変量を定義した。最近になって Chunyi-Li 氏によって５次超曲面として与えられる３次元カラビヤウ多様体に対して BG 型不等式予想が成立することが示されたため、特にこの場合に Bridgeland 半安定対象を数え上げる DT 不変量が定義されたことになる。今後、５次超曲面上の DT 不変量の研究への応用が見込まれる。

（２） 連接層の非可換変形についての研究

Donovan-Wemyss は３次元フロップ収縮に付随する「収縮代数」の概念を導入し、フロップを２回合成して得られる導来圏の自己同値を収縮代数に付随する捻り関手によって記述できることを証明した。収縮代数はフロップ収縮の例外曲線の非可換変形の普遍対象として構成される。一方、DT 不変量は通常の可換な変形理論を用いて定義されるものであり、Donavan-Wemyss の収縮代数と DT 不変量の間に何らかの関係があるかというのは自然な問いである。私は収縮代数の次元が DT 不変量の特別な場合である種数ゼロの Gopakumar-Vafa 不変量を用いて記述されることを証明した。この結果によって３次元フロップ収縮の場合に非可換変形によって定義される不変量と可換な変形によって定義される不変量との間の関係が明らかとなった。

更に３次元フロップ収縮とは限らない一般の場合に、通常の可換な変形理論によって構成される安定層のモジュライ空間の上にある種の大域的な非可換構造が入ることを証明した。この非可換構造は Kapranov の意味での NC 構造を弱めたものであり、擬 NC 構造と呼んでいる。この擬 NC 構造は３次元フロップ収縮の場合の収縮代数を一般化したものである。３次元カラビヤウ多様体上の連接層のモジュライ空間上の擬 NC 構造を通じて何らかの不変量を定義し、通常の DT 不変量との比較が可能かという問題が考えられ、今後の課題である。

（３） Gopakumar-Vafa 不変量の研究

Gopakumar-Vafa 不変量とは 1998 年頃に物理学者の Gopakumar と Vafa によって提唱された３次元カラビヤウ多様体上の不変量であり、Gromov-Witten 不変量や Pandharipande-Thomas 不変量の生成関数を統治すると考えられている不変量である。しかしその数学的定義は、これまで Hosono-Saito-Takahashi や Kiem-Li によって与えられていたものの、本来満たすべき性質を満たさないことが判明し、その定義は完全なものではなかった。特に GV 不変量を定義すると考えられる１次元安定層のモジュライ空間に特異点が存在する場合が問題であった。私は Maulik 氏との共同研究で、１ 次元安定層のモジュライ空間上に消滅サイクル層を貼り合わせた捻り層を用いることで GV 不変量の新たな数学的定義を与えた。これは消滅サイクル層を用いるという点では Kiem-Li によるアプローチと似ているが、特別な向き付けデータを取ったり、重みフィルトレーションを取らないなど、随所で定義を変更している。実際、Kiem-Li の定義では GW 不変量と整合しないが我々の定義では整合する例を与え、我々の定義の妥当性を示した。更に代数曲面上の標準束の全空間として与えられる３次元カラビヤウ多様体で曲線類が既約である場合、我々が定義した GV 不変量と PT 不変量の生成関数の間に期待される関係が成立することを証明した。

我々の定義した GV 不変量は Euler 標数が１である１次元安定層のモジュライ空間を用いているが、本来は Euler 標数の値に無関係に定義されるべきものである。そこで Euler 標数に制限を与えない GV 不変量も定義し、これが上述の GV 不変量の定義と一致すると予想した。更に GV 不変量の壁越え公式も証明し、特に双有理同値な３次元カラビヤウ多様体の GV 不変量が等しいことを証明した。この証明を与える際、一般に滑らかな射影的代数多様体上の半安定層のモジュライスタックがその良モジュライ空間上解析局所的に箙表現のモジュライスタックとして記述できることを証明した。この結果はそれ自体有用なものであり、更なる応用が見込まれると考えている。

（４）３次元アーベル多様体上の DT 不変量の研究

３次元アーベル多様体に対しては BG 型不等式予想が成立することが知られているため、この場合に（１）の研究結果によって Bridgeland 半安定対象を数え上げる DT 型不変量を考察することができる。しかしこの場合の不変量は自動的にゼロになってしまうため、不変量の定義を改変した被約 DT 不変量を考察する必要がある。Georg Oberdieck 氏と Dulip Piyaratne 氏との共同研究で３次元アーベル多様体上の Bridgeland 半安定対象を数え上げる被約 DT 不変量を定義し、安定性条件を変えることによる壁越え公式を証明した。更に壁越え公式を用いて、通常の安定層を数え上げる被約 DT 不変量が３次元アーベル多様体の自己同値によってある種の関係式を満たすことを証明した。階数が１の場合に限定するとこの関係式は Pandharipande らによって予想されていた被約 DT 不変量の生成関数の具体的な公式と整合することを示した。

（５）４次元カラビヤウ多様体上の GV 型不変量の研究

通常の DT 不変量は３次元カラビヤウ多様体にしか定義されないが、近年になって Borisov-Joyce や Cao-Leung によって４次元カラビヤウ多様体上でも同様の DT 型不変量が定義されることが示された。これは DT4 不変量と呼ばれる。一方、４次元カラビヤウ多様体上の Gromov-Witten 不変量については Klemm-Pandharipande による先行研究が存在し、それらが種数０及び１の GV 型の整数値不変量によって統治されると予想されていた。Yalong Cao 氏及び Davesh Maulik 氏との共同研究で４次元カラビヤウ多様体上の種数０の GV 型不変量が４次元カラビヤウ多様体上の１次元安定層から定義される DT4 不変量で与えられると予想し、様々な具体例でこの予想が成立することを証明した。また種数１の GV 不変量については４次元カラビヤウ多様体上の安定対モジュライ空間上の DT4 不変量を用いて記述されると予想した。これらの予想をより一般に示す技術を確立することが今後の DT4 不変量の研究の課題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　12　件）

① Dulip Piyaratne and Yukinobu Toda, Moduli of Bridgeland semistable objects on 3-folds and Donaldson-Thomas invariants. *J. Reine Angew. Math.* 747 (2019), 175-219, 査読有

② Yalong Cao, Davesh Maulik and Yukinobu Toda, Genus zero Gopakumar-Vafa type invariants for Calabi-Yau 4-folds. *Adv. Math.* 338 (2018), 41-92, 査読有

③ Davesh Maulik and Yukinobu Toda, Gopakumar-Vafa invariants via vanishing cycles. *Invent. Math.* 213 (2018), no. 3, 1017-1097, 査読有

④ Yukinobu Toda, Moduli stacks of semistable sheaves and representations of Ext-quivers. *Geom. Topol.* 22 (2018), no. 5, 3083-3144, 査読有

⑤ Yukinobu Toda, Non-commutative thickening of moduli spaces of stable sheaves. *Compos. Math.* 153 (2017), no. 6, 1153-1195, 査読有

⑥ Yukinobu Toda, Generalized Donaldson-Thomas invariants on the local projective plane. *J. Differential Geom.* 106 (2017), no. 2, 341-369, 査読有

⑦ Yukinobu Toda, Gepner type stability condition via Orlov/Kuznetsov equivalence. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2016, no. 1, 24-82, 査読有

⑧ Yukinobu Toda, Stable pair invariants on Calabi-Yau threefolds containing P2.*Geom. Topol.* 20 (2016), no. 1, 555-611, 査読有

⑨ Yukinobu Toda, Non-commutative width and Gopakumar-Vafa invariants. *Manuscripta Math.* 148 (2015), no. 3-4, 521-533, 査読有

⑩ Yukinobu Toda, Flops and the S-duality conjecture. *Duke Math. J.* 164 (2015),no. 12, 2293-2339, 査読有

⑪ Yukinobu Toda, S-duality for surfaces with An-type singularities. *Math. Ann.*363 (2015), no. 1-2, 679-699, 査読有

⑫ Yukinobu Toda, Gepner type stability conditions on graded matrix factorizations. *Algebr. Geom.* 1 (2014), no. 5, 613-665, 査読有

〔学会発表〕（計　10　件）

① Yukinobu Toda, Birational geometry for d-critical loci and wall-crossing in Calabi-Yau 3-folds, D-modules, Quantum geometry and related physics, ２０１９年１月

② Yukinobu Toda, Semiorthogonal decompositions under d-critical flips, Categorical and Analytic invariants in Algebraic Geometry, ２０１８年１１月

③ Yukinobu Toda, Birational geometry for d-critical loci and wall-crossing in Calabi-Yau 3-folds, Moduli spaces and varieties in Shanghai, ２０１８年１０月

④ Yukinobu Toda, Birational geometry for d-critical loci and wall-crossing in Calabi-Yau 3-folds, Yamabe Memorial Symposium: Moduli Spaces in Algebraic Geometry, ２０１８年9月

⑤ Yukinobu Toda, Gopakumar-Vafa invariants on Calabi-Yau 3-folds and 4-folds, Geometric correspondences of gauge theories, ２０１８年9月

⑥ Yukinobu Toda, Birational geometry for d-critical loci and wall-crossing in Calabi-Yau 3-folds, Geometry and Topology inspired by physcis, ２０１８年6月

⑦ Yukinobu Toda, Birational geometry for d-critical loci and wall-crossing in Calabi-Yau 3-folds, String-Math 2018, ２０１８年6月

⑧ Yukinobu Toda, Gopakumar-Vafa invariants and wall-crossing, TMS meeting, ２０１７年１２月

⑨ Yukinobu Toda, Gopakumar-Vafa invariants and wall-crossing, Modern Moduli Theory, ２０１７年9月

⑩ Yukinobu Toda, Donaldson-Thomas invariants on abelian 3-folds and Fourier-Mukai transforms, Inaugural conference for Mirror Symmetry Laboratory of HSE, ２０１７年5月

〔図書〕（計　１　件）
戸田幸伸、数学書房、連接層の導来圏に関わる諸問題、２０１６年、２７６ページ

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織