様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６２８７００４

研究課題名（和文）ルート系に付随する代数系の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometric study of algebras attached to root systems

研究代表者
加藤　周（Kato, Syu）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：４０４５６７６０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　12,500,000円

研究成果の概要（和文）：研究期間の前半に幾何学的拡大代数の理論を整備し、一般論およびその特別な例としての箙Hecke代数や一般化Springer対応の理解を行なった。これにより箙Hecke代数が古典的な最高ウェイト圏に類似する構造を持つこと、およびGreen関数と呼ばれるChevalley群の表現論に出現する関数の直交関係式が実はホモロジー代数的な意味での直交性の直接の系であることなどが確立された。これらによりこの分野のいくつかの予想を解決した。

後半では、カレント代数の表現論と半無限旗多様体やアフィン・グラスマン多様体との関係を研究した。設定は異なるがパターンは前半のものと類似しておりそこでもいくつか予想を解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
表現論とは(群などの)対称性を固定してその実現がどの程度あるか分類し、それらの間の関係を研究する数学分野である。古典的には表現論が半単純、つまり任意の実現が原始的なものの集まりとしてかける状況が大切であった(例えば、素粒子の分類などは実際にそのような現象と結びついている)。しかし、現実が素粒子や原子の単純な集まりとは異なり互いに干渉しあうように対称性も単純な集まりの間に相互関係がある場合が大切であることが分かってきた。本研究の成果はそのような相互関係がある対称性の理論を今までより一歩推し進め、異なる場所の間の相互関係も許すようなものを許容すると古典的な対称性もよりよくわかるというものである。

研究成果の概要（英文）：In the first half of the research period, we have developed and polished the theory of geometric extension algebras from the both of the general theory and examples like quiver Hecke algebras and generalized Springer correspondence. In particulcar, we have revealed that quiver Hecke algebras possesses a structure similar to the classical theory of highest weight categories, and find that the orthogonality relation of Green functions arising from representation theory of Chevalley groups are direct corollaries of some orthogonality in the sense of homological algebras. This resolves several conjectures in this area.

In the latter half, we have studied the representation theory of current algebras and geometry of semi-infinite flag manifolds and affine Grassmanians. Although the setting is different, the pattern is similar here. Consequently we have proved several conjectures also in this area.

研究分野：表現論

キーワード：幾何学的拡大代数　半無限旗多様体　affine Hecke代数　箙Hecke代数　一般Springer対応　アフィン・グラスマン多様体　コストカ多項式　非対称Macdonald多項式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．　　研究開始当初の背景

幾何学的表現論は 20 世紀前半に Borel-Weil による旗多様体の直線束を用いたコンパクト・リー群の既約有限次元表現の実現やその一般化としての無限次元表現の適切なベクトル束の切断の空間としての実現に始まった。1960 年代～1980 年代の研究によりそのような表現たちのなすアーベル圏の構造は Riemann-Hilbert 対応などを通して旗多様体上の構成可能層の幾何学やそこから自然に現れる代数系である Hecke 代数などにより記述されることが分かっていた。このような研究の中でとりわけ重要なのが Springer 対応やその一般化である Deligne-Langlands-Lusztig 予想(Kazhdan-Lusztig の定理)である。それは Springer ファイバーと呼ばれる非特異でも既約でも、そもそも被役ですらないため初見ではとても意味あるものとは思えない代数多様体の構造を詳しく調べることで p-進簡約群の無限次元(スムース)表現の構造や一般線型群の無限次元表現の構造が(affine) Hecke 代数と呼ばれる代数系の表現論を通じて制御できる(既約表現やその指標などが計算できる)ことを主張していた。

表現論において``最もよく分かっている”クラスの無限次元表現のクラスである古典的な半単純リー代数の圏 $\mathcal{O}$ と呼ばれる表現圏においては標準加群(または Verma 加群)と呼ばれる加群が存在し、それが解析しやすい性質を持つという事実を元手にホモロジー代数的側面から多くの研究が行われてきた(例えば、射影加群、標準加群、単純加群の重複度の間に関係を与えるいわゆる Bernstein-Gelfand-Gelfand 相互律などが有名である)。しかし、2010 年代に入るまでそれらは affine Hecke 代数には適用できず、従って p-進代数群の加群圏の詳細なホモロジー代数的研究もまた行われていなかった(標準加群という名前の表現は上記の Kazhdan-Lusztig の定理の枠組みの中で構成されていたが、そのホモロジー代数的な性質についてはほぼ何も知られていなかった)。

一方、量子群の表現の圏論化(を通じた結び目の不変量の研究や対称群の表現論の精密化)などを動機として 2008 年ごろ Khovanov-Lauda, Rouquier により affine Hecke 代数のうちで特によく研究されていた A 型の場合を上述の研究とは異なるかたちに任意の Kac-Moody Lie 型に一般化する代数系として箙 Hecke 代数が提示された。箙 Hecke 代数は生成元と関係式で書かれた代数ではあるが、それまで研究されてきた類似の代数と比べるとその関係式は格段に複雑である。それらのうちで対称型(通常のリー代数の分類では ADE 型)と呼ばれる場合には箙 Hecke 代数は箙の表現空間の上の偏屈層を用いた実現があることが Varagnolo-Vasserot らによる示されていた。このことは(対称型 Kac-Moody Lie 代数に付随する)箙 Hecke 代数の表現論もまた Springer ファイバーと同様の幾何学を持ち、上述の Kazhdan-Lusztig の定理をまねることにより箙 Hecke 代数の標準加群が定義できることを意味していた。

研究代表者は上記の Springer 対応や箙 Hecke 代数などといった構成可能層を用いた幾何学的構成を持つ代数系の標準加群を(上記のように)幾何学的に定義したとき、これまでほぼ何も知られていなかったそのホモロジー論的諸性質が対応する幾何学的な構造からかなり統制されているのではないかという着想に基づき、その一般論および具体例の研究を行なっていた(幾何学的拡大代数の理論)。特に、幾何学的に定義された標準加群が圏 $\mathcal{O}$ における標準加群と同様の性質を持つことをいくつかの場合に見ていた。また、そのような結果のアナウンスに触発され代数的に類似の性質を公理化する研究なども他の研究者によって行われ、(上記)圏 $\mathcal{O}$ に対して知ら

れている深い結果の多く(上記の Bernstein-Gelfand-Gelfand 相互律などを含む; ただし標準加群が複数種類出てくるためにその詳細な定式化はずれる)はそれまでに存在した公理的取り扱い(いわゆる最高ウェイト圏)を適切に緩めれば実際には深く研究されている多くの由緒正しい代数構造に共通して出現する構造であることが認識されるようになって来ていた。

２． 研究の目的

本研究の目的は上記の研究代表者の理論を纏め上げ、さらに同様の加群圏におけるものも含めそれらを構成、研究する技術的なレシピを増やしつつこれら新しいクラスの表現論的加群圏に関する研究を発展させてゆくこととであった。ただし、ここでは単に抽象的な一般論を追求するのではなく圏論化の文脈のもとで表現論的に重要な特殊関数(もしくは特殊な元)の別の重要な特殊関数(同左)による展開係数が正整数値をとることや、それらの間の関係式の存在理由などについての自然な説明を与えるなど、単に加群圏の構造がより深くわかるという以上に古くから知られていた対象の新しい理解を与えることを主たる応用として見据えていた。

３． 研究の方法

上記のように本研究は研究代表者の着想をもとにそれを発展させるものであるので、その手法の一つにはアイデアの自然な発展の追求、つまり幾何学的構成のより深いデータである偏屈層の重みの理論と幾何学的に構成された代数およびそのイデアル、商などとの整合性を見ることにより幾何学的な部分空間の増大列の情報を代数系の構造に反映させることが挙げられた。また、研究代表者の理論の帰結と同様の構造を持つことが代数的に証明されているという状況においてそのような構造と関係する代数的ないし幾何学的構成を詳しく調べることによってそれらに共通する表現論のパターンにおいて有用な帰結を導き出す仕組みを整えるという手法もとられた。

４． 研究成果

まず、１.の冒頭のアイデアに関しては研究計画開始時のアイデアを精密化し、適切な加群の極小射影分解を捉える方法を与える、Lieb-McGuire 系と呼ばれる可積分系の解の冪級数展開の構造に関する応用を加えるなどした上で最終的に雑誌論文②として出版された。また、その一つの応用として古典的な有限体上の代数群(有限シェバレー群)の通常表現の記述の骨組みである Green 関数が実際には適切な加群の次数付き指標を介した解釈を許すこと、特にそれを計算するいわゆる Lusztig-庄司アルゴリズムとは上記圏 $\mathcal{O}$ における Bernstein-Gelfand-Gelfand 相互律のこの設定における類似物の反映であることなどを見出した。また、研究機関開始前に同様の考察を所謂箙 Hecke 代数に対しても行なっていた([Duke Math. J **163** no.3 (2014)])がそれを一般化し箙の表現論における所謂 BGP-鏡映関手の圏論化(というより、その Lusztig による Hall 代数化版の圏論化といったほうが正確)である斉藤鏡映関手の持つホモロジー論的に著しい性質およびそれが適切な意味で結合法則を持つという事実を一般の対称 Kac-Moody 型に一般化した上で証明し、出版した(論文⑤)。

その後、研究代表者の理論と同様の構造を持つ(ことが Chari-Ion らにより示されていた)が直

接的にはそのホモロジー代数的構造について研究代表者の理論が適用できない半単純リー代数のカレント代数(半単純リー代数の一変数多項式環への係数拡大として得られるリー代数)についてその構造や基本性質を(前段落のものとは異なるが)幾何学的に導くことを試みた。そのために Chari-Ion の設定で現れる加群を自然に非対称化する必要に迫られ、それと Braverman-Finkelberg らによる半無限旗多様体の Borel-Weil の定理を統合する形で半無限旗多様体に対する Demazure 指標公式(有限次元旗多様体にも類似の幾何学的設定があり、そこから生じる加群の指標公式を Demazure 指標公式と呼んだ。これは Weyl 指標公式をより易しい演算の積に分解するものになっている。我々の状況ではそれとは異なり、指標の間を易しい演算の積で結ぶと易しい演算の積で得られる作用素およびその固有関数系が出現し、それにより加群の指標が差分方程式系の固有値問題と結びつくという形になっている)を定式化、証明し、出版した(論文③)。

このような記述をさらに深める研究をする過程で、半無限旗多様体のモデルの取り方の双対性とアフィン型旗多様体の双対性(これらの``双対性”にはまだ良い定義はない)の間に関係があるべきであることに気付き、それを言語化しようと試みる過程で所謂 thick 旗多様体に対する柏原-Shimozono 予想の片側を証明し(論文④)、それと前段落の話を結びつけることで thick アフィン・グラスマン多様体の大域切断の構造に関する Boris Feigin の予想を証明した(論文⑥)。後者の結果は Chari-Ion の結果と可解格子模型、および共型場理論における Wess-Zumino-Witten 模型の間の架け橋を与えたものともみることも可能である。これらの論文はすでに出版されている。

その後さらに研究を推進するためにはいわゆる半無限旗多様体をどのように扱うかについての基礎的な研究が必要であるとの認識に達したためそういった研究も行い、アナウンスもしてはいるがまだ研究を完遂したとは言えない状況で研究期間が終了した。

全体を通して言えば、幾何学的拡大代数の理論を一応の形で確立・出版し、その後さらに類似の表現論的な設定に関しての研究をいくつか行うことにより研究代表者のみいだした構造や考え方が表現論的に深い内容を持つことが確信できた(そして少なくとも一部の研究者には確信させることができたと思う)。後半の内容は当初の予定とはずれ、特に幾何学的拡大代数の理論と類似の帰結を持つ(本質的に新しい)別の設定と理論を提示することはできなかった。ただ、後半の研究は研究開始時には研究代表者が認知していなかったものを含む多くの理論を横断的に結んでいるのでさらに追求する価値が十分にあると思う。これらの面白さをきちんと保ちつつ対応する表現論に関するより組織的な研究を行うことは今後の課題としたい(その一部については次の研究計画「基盤研究(B)・19H01782・ループ空間の幾何学と表現論」での実現を目指している)。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計６件）

① 加藤周、A homological study of Green polynomials, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 48 no. 5 1035--1074 (2015) DOI: 10.24033/asens.2265

② 加藤周、An algebraic study of extension algebras, Amer. J. Math. 139 no. 3 567--615 (2017) DOI: 10.1353/ajm.2017.0015
③ 加藤周、Demazure character formula for semi-infinite flag varieties, Math. Ann. 371 (3) 1769--1801 (2018) DOI: 10.1007/s00208-018-1652-5
④ 加藤周、Frobenius splitting of thick flag manifolds of Kac-Moody algebras, Int. Math. Res. Notices, published online, DOI: 10.1093/imrn/rny174
⑤ 加藤周、On the monoidality of Saito reflection functors, Int. Math. Res. Notices, published online, DOI: 10.1093/imrn/rny233
⑥ 加藤周、Sergey Loktev、A Weyl module stratification of integrable representations (with an appendix by Ryosuke Kodera), Comm. Math. Phys. 368 (1), 113--141 (2019) DOI: 10.1007/s00220-019-03327-5

〔学会発表〕（計７件）

① 加藤周、量子群やヘッケ環から生じるアフィン最高ウェイト圏とその応用について、日本数学会年会(招待講演)、明治大学、2015年３月
② 加藤周、An algebraic study of extension algebras、Symplectic representation theory(招待講演)、University of Glasgow、2015年６月
③ 加藤周、半無限旗多様体の幾何学と表現論、Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2017、2017年６月
④ 加藤周、Loop structure on equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds、GEOMETRY AND REPRESENTATION THEORY AT THE INTERFACE OF LIE ALGEBRAS AND QUIVERS(招待講演)(国際学会)、Bochum University、2018年９月
⑤ 加藤周、Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and quantum K-theory of flag manifolds、Quantum K-theory and related topics(招待講演)(国際学会)、Korea Institute for Advanced Study、2018年11月
⑥ 加藤周、Frobenius splitting of semi-infinite flag manifolds、Taipei conference in representation theory VI(招待講演)(国際学会)、Academia Sinica、2019年１月
⑦ 加藤周、Frobenius splitting of semi-infinite flag manifolds、Representation theory, gauge theory, and integrable systems(招待講演)(国際学会)、東京大学 Kavli IPMU、2019年２月

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~syuchan

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。