

令和元年5月22日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287007

研究課題名(和文)代数多様体上の複体とそのモジュライの研究

研究課題名(英文)Complexes on algebraic varieties and their moduli spaces

研究代表者

吉岡 康太 (Yoshioka, Kota)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：40274047

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,800,000円

研究成果の概要(和文)：K3曲面やアーベル曲面上の不安定層のモジュライ空間についていくつかの成果を得た。たとえばK3曲面の場合に、S同値性により生じる特異点の局所モデルを記述し、アーベル曲面の場合に strange dualityの例を与えた。さらにBeauvilleの2系列の既約symplectic多様体の場合にKawamata-Morrisonの cone予想を解決した。Enriques曲面上の安定層のモジュライ空間については空集合でないための条件を標数2の非古典的Enriques曲面の場合も含め記述し、双有理幾何についてもいくつかの結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

安定層とそのモジュライ空間は微分幾何やYang-Mills理論(インスタントン)と関係し、様々な立場から研究されてきた。本研究では多くのよい性質をもつ曲面であるK3曲面、アーベル曲面、Enriques曲面に対し、そのモジュライ空間の性質を調べた。とくにEnriques曲面上の安定層についてはこれまで研究があまり進んでいなかったが、この研究で安定層の存在性やモジュライの既約性など基本的な問題に成果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We obtained some results on moduli of semi-stable sheaves on K3 surfaces and abelian surfaces. In particular we described the local structure of the singular points and get an example of strange duality. We also proved Kawamata-Morrison's cone conjectures for two series of irreducible symplectic manifolds of Beauville.

For moduli spaces of stable sheaves on Enriques surfaces, we described the condition for the non-emptiness. We also obtained some results on the birational geometry of the moduli spaces by using Bridgeland stability conditions.

研究分野：代数幾何

キーワード：モジュライ 複体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

アーベル曲面や $K3$ 曲面上の安定層のモジュライ空間は、豊富にあるフーリエ向井変換を巧みに利用して空集合でないための条件や位相不変量（特に既約性）などモジュライ空間の基本的な性質が調べられていた。また 21 世紀になり Bridgeland により導入された安定性条件がモジュライ空間の解析に大変有効であることが近年認識されている。とくにアーベル曲面や $K3$ 曲面の場合に、安定複体のモジュライ空間が射影多様体として構成され、安定層のモジュライ空間の双有理幾何に応用され始めていた。

アーベル曲面や $K3$ 曲面は標準束が自明な曲面であるが、その有限エタール商、したがって標準束がトーション元の場合もフーリエ向井変換がアーベル曲面や $K3$ 曲面ほどではないが豊富にあり、モジュライ空間の解析に利用されてきた。とくに Enriques 曲面上の奇数階数の安定層のモジュライ空間は非特異であり、そのホッジ数がフーリエ向井変換を利用して計算されていた。特に安定層の存在条件が分かっていた。一方偶数階数の安定層のモジュライ空間は、Kim Hoiil による一連の研究で、一般には特異点をもつことが分かっていた。また山田紀美子はその特異点が有理特異点であることを示し、モジュライ空間の小平次元が 0 になることが分かっていた。

2. 研究の目的

代数多様体上の安定ベクトル束を調べる事を主目的とするが、連接層の圏ではなく、より一般的でかつ非自明な対称性が多くある導来圏の中で考察する。したがって複体のモジュライ(とくに Bridgeland 安定対象のモジュライ)を研究し、その応用として安定層のモジュライ空間の性質を調べる。

3. 研究の方法

安定層や Bridgeland 安定性は多くの分野と関連を持ち、かつ発展している。それらの知識を継続して取り入れることは大変重要である。そこで種々の文献を購入し、また研究集会に参加して、種々の情報を獲得し研究に役立てる。また研究打ち合わせ、研究発表などによっても研究を進める。

4. 研究成果

(1) アーベル曲面や $K3$ 曲面上の安定層のモジュライの研究

(a) アーベル曲面上の安定層のモジュライ空間の Bogomolov 成分に現れる既約 symplectic 多様体について nef cone と movable cone を記述した。更に Bogomolov 分解に現れる既約 symplectic 多様体について Lagrangian fibration の底空間が射影空間となることを示した。また Kawamata-Morrison の cone 予想 (nef cone への同型群の作用に関し、基本領域として finite polyhedral cone が取れるという予想) を movable cone の chamber 分解の定義ベクトルの性質 (すなわち定義ベクトルの Beauville-Bogomolov-Fujiki 形式に関する自己交点数の有界性) に着目することにより Beauville の 2 系列の既約 symplectic 多様体の場合に解決した。またこれらの場合に双有理モデルが有限個であることを示した。

(b) 曲面上の安定層のモジュライ空間のある種の組について、行列式直線束の大域切断の空間の間の双対性が観察され、strange duality と呼ばれる。本研究ではアーベル曲面上の安定層や安定複体のモジュライの上の行列式直線束の大域切断の空間がアーベル曲面の変形に対しベクトル束としてふるまうための十分条件を見出し、strange duality の成立例を見出した。

(c) $K3$ 曲面上の半安定層のモジュライ空間については S 同値性により特異点が生じるが、フーリエ向井変換により安定ベクトル束の直和の場合に帰着させることにより、特異点の局所モデルを記述した。

(d) $K3$ 曲面やアーベル多様体など標準束が自明な多様体について、多くの非自明な導来同値の例が知られている。既約 Symplectic 多様体は $K3$ 曲面の高次元類似であるので、非自明な導来同値があることが期待される。双有理同値な多様体上の導来同値の構成はいくつか知られているので、双有理同値でない場合に例を構成するのは興味深い問題である。そこで Meachan, Mongardi と共同で導来同値だが双有理でない既約 symplectic 多様体の例を構成した。具体的には $K3$ 曲面上の点の Hilbert スキームの間の導来同値を利用した。この導来同値性は Ploog により解決されているので、双有理同値性を調べるのが問題となる。この問題を向井格子の算術的な解析 (古典的 2 次形式の問題に帰着される) をすることにより解決した。

(e) $K3$ 曲面上の安定層のモジュライ空間について Brill-Noether 軌跡を考察した。とくにピカル数が 1 の $K3$ 曲面上で階数が 3 以下の場合にモジュライ空間の一般元についての層係数コホモロジー群を計算した。手法は Bridgeland 安定性とその壁越え現象を利用するもので、rigid 層による壁の構造解析が重要な役割を果たす。今後はもっと一般の場合 (階数がより高い場合など) についても研究を進める予定である。

(2) Enriques 曲面上の安定層やそのモジュライ空間についての研究。

(a) 安定層の存在問題: Enriques 曲面は標数が 2 でない場合は、 $K3$ 曲面のエタール商とあらわされるなど標数 0 の場合と似通った構造を持っているが、標数 2 の場合は標準束が自明で

ある非古典的 Enriques 曲面が存在するなどその性質はかなり異なることが知られている。一方標数 2 の Enriques 曲面は標数 0 の曲面の退化として得られることから、安定層のモジュライ空間の位相的性質は標数 2 の場合に遺伝すると期待される。本研究では変形理論なども利用しすべての Enriques 曲面上で安定層が存在するための条件を記述した。まず標数が 2 でなく、また unnodal な（非特異有理曲線を含まない）場合に安定層の存在条件を以前使った奇数階数のときの手法を拡張することにより与えた。さらに Enriques 曲面を変形させることにより、nodal な場合や標数が 2 の場合にも向井ベクトルの長さが -2 でない場合には安定層の存在条件を与えた。ところで向井ベクトルの長さが -2 の場合（すなわち例外ベクトル束の場合）には、標数 0 の場合には Kim Hoiil がその存在条件を与えていたが、その証明にはあいまいな部分があった。そこでその部分を修正および簡略化し、その結果例外ベクトル束の存在条件を標数には依らない形で与えることができた。Howard Nuer により Bridgeland の安定複体の存在条件と安定層の存在条件が同じであることがわかっているので、安定複体の存在条件を記述したことにもなる。

(b) 標数が 2 でない場合に unnodal Enriques 曲面上の階数 2 の安定層のモジュライ空間は既約であることが Kim Hoiil により発表されていたが、その証明の一部に議論の省略があったので、楕円ファイバー構造とフーリエ向井変換を組み合わせた異なるアプローチによる証明を与えた。これにより、Nuer による偶数階数の場合の安定層のモジュライの既約性の証明が完成した。さらに Enriques 曲面を変形させることにより、nodal な場合にもモジュライ空間の連結性を示し、したがって正規性が成り立つ場合（たとえば次元が 5 以上の場合）に既約性を示した。

(c) (a) で得られた安定層の存在条件とフィルトレーションに関する次元評価の手法を使って、slope 安定層や slope 安定ベクトル束の存在条件についても結果を得た。

(d) 本研究で示した安定層（したがって安定複体）の存在定理により、フーリエ向井変換が存在するための向井ベクトルによる特徴づけを得たので、それを利用し Enriques 曲面上の安定複体のモジュライ空間を標数が 2 でない場合に射影スキームとして構成した。さらに安定複体や安定層のモジュライ空間の間の双有理対応を調べた。とくに Bridgeland stability に関する壁越え現象を調べ、壁越えにより双有理写像が引き起こされることをほぼ確かめた。

(e) Enriques 曲面のモジュライは 10 次元であり、その中で general なものは被覆 $K3$ 曲面のピカル数 h が 10 になることが知られている。このような general な Enriques 曲面上の安定層のモジュライ空間は向井ベクトルの被覆 $K3$ 曲面へ向井格子への引き戻しが原始的な場合には非特異多様体になることが分かっている。このようなモジュライ空間のうち、階数が 0 の場合について、Giulia Sacca はある種の仮定のもと第 2 ベッチ数を計算した。この仮定は重複曲線上の安定層に関する詳細な解析により、成立することを確認することができ、したがって第 2 ベッチ数を求めることができた。この結果はその後の研究でモジュライ空間のピカル群が行列式直線束として構成されるモジュライ空間上の直線束により生成されることが示されている。

(3) その他の研究：

(a) 近年位相的エントロピーの圏論的類似として、導来圏の endofunctor の複雑さを測る圏論的エントロピーという不変量が導入された。そこでアーベル多様体のフーリエ向井変換に関するエントロピーを調べた。特にアーベル曲面の場合に詳しく調べ、菊田と高橋による Gromov-Yomdin 型の予想を確かめた。

(b) 曲面を blow-up した場合に安定層のモジュライ空間の関係は perverse coherent sheaf のモジュライを考えることにより壁越え現象を調べることにより解析できることが以前の中島啓との研究によりわかっている。一方戸田により Bridgeland の安定性条件が blow-up の場合に定義され、その安定性と perverse coherent sheaf の安定性の関連が問題となっていた。本研究では perverse coherent sheaf のモジュライの壁越え現象が Bridgeland 安定性の壁越え現象としてとらえられることを示した。また通常の Matsuki-Wentworth の twisted stability に関する壁越え現象が Bridgeland の安定性に関する壁越え現象としてとらえられることを示した。この結果を得るため、モジュライ空間上の直線束に関する考察から、安定性条件の空間からモジュライ空間の正錐になると期待される空間への全射を構成し、その上の線形な壁の引き戻しとして安定性条件の空間上の壁が得られることも示した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 9 件)

C., Meachan, G., Mongardi, K., Yoshioka Derived equivalent Hilbert schemes of points on $K3$ surfaces which are not birational, *Math. Z.*, to appear 査読有

K., Yoshioka, Moduli spaces of stable sheaves on Enriques surfaces, *Kyoto J. Math.* **58**, Number 4 865–914 査読有

H. Minamide, S. Yanagida, K. Yoshioka, The wall-crossing behavior for Bridgeland's stability conditions on abelian and $K3$ surfaces, *J. reine angew. Math.* **735** (2018), 1–107 DOI: 10.1515/crelle-2015-0010 査読有

K., Yoshioka, A note on stable sheaves on Enriques surfaces, *Tohoku Math. J.* (2) **69** (2017), 369–382 査読有

B., Bolognese, A., Marian, D., Oprea, K., Yoshioka, On the strange duality conjecture for abelian surfaces II, J. Alg. Geom. **26** (2017), 475--511 査読有
K., Yoshioka, A note on stable sheaves on Enriques surfaces II, Manuscripta Math. **153** (2017), 147--158, DOI: 10.1007/s00229-016-0882-7 査読有
K., Yoshioka, Fourier-Mukai duality for K3 surfaces via Bridgeland stability condition, J. Geometry and Physics **122**, (2017) 103--118 査読有
K., Yoshioka, Bridgeland's stability and the positive cone of the moduli spaces of stable objects on an abelian surface. Development of moduli theory--Kyoto 2013, 473-537, Adv. Stud. Pure Math., 69, Math. Soc. Japan, 2016. 査読有
E., Markman, K., Yoshioka, A proof of the Kawamata-Morrison Cone Conjecture for holomorphic symplectic varieties of K3 or generalized Kummer deformation type, Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, No. 24, 13563--13574, doi:10.1093/imrn/rnv119 査読有

〔学会発表〕(計8件)

吉岡康太 Moduli of stable sheaves on Enriques surfaces, Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces, Levico-Terme (Italy), 18--22, September, 2017
吉岡康太 Categorical entropy for Fourier-Mukai transforms on generic abelian surfaces, Derived category and birational geometry, 20-23 February, 2017, 阪大理学部
吉岡康太 Vector bundles on Enriques surfaces, 代数的層とそのモジュライの研究とその周辺 February 1 - 3, 2017, RIMS
吉岡康太 Moduli spaces of stable sheaves on Enriques surfaces, Derived categories and Chow groups of hyperkaehler and Calabi-Yau varieties September 19--23, 2016, Simons center for geometry and physics, Stony Brook, NY, USA
吉岡康太 Fourier-Mukai duality for K3 surfaces, Vector bundles on algebraic curves 2015, Warwick University, June 15--19 2015, England
吉岡康太 Twisted stability and Bridgeland stability, Geometry from stability conditions, Warwick University, February 16--20 2015, England
吉岡康太 Bridgeland stability and the cone of generalized Kummer manifolds, Moduli spaces of irreducible symplectic varieties, cubics and Enriques surfaces, Le laboratoire de mathematiques Paul Painleve, Lille, March 24-28 2014, France
吉岡康太 Twisted stability and Bridgeland stability, New developments in Algebraic geometry, NTU, Taipei, September 1--5 2014, Taiwan
Stable sheaves on Enriques surfaces, K3, Enriques Surfaces and Related Topics, November 10--14, 2014, Nagoya University

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：

発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。