

令和元年6月21日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287013

研究課題名(和文) グラフィクスとカンドル理論の観点からの4次元トポロジーの研究

研究課題名(英文) Research on 4-dimensional topology from the viewpoint of graphics and quandle theory

研究代表者

鎌田 聖一 (KAMADA, SEIICHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60254380

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,300,000円

研究成果の概要(和文)：4次元ユークリッド空間にはめ込まれた閉曲面(はめ込み曲面絡み目)に標準形を定義し、任意のはめ込み曲面絡み目が標準形に変形可能であることを示した。それを用いることで、マーカー付きグラフ図式によるはめ込み曲面絡み目の表示方法が得られた。また、リボン曲面結び目の自然な拡張として、はめ込み曲面結び目の概念を導入し、はめ込み曲面絡み目がリボン・クラスプ曲面結び目となる条件を与えた。カンドルのテンソル積の概念を導入し、その応用として曲面絡み目に接着する1ハンドルを扱う方法を開発した。有限カンドルから1ハンドルの不変量が容易に得られる特徴がある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲面から4次元ユークリッド空間への一般的写像ははめ込みであり、曲面絡み目の概念を埋め込みからはめ込みへ拡張しておくことは重要である。今回得られたはめ込み曲面絡み目の標準形とマーカー付きグラフ図式の議論は、この分野の研究に新しい研究手段を与えるものである。結び目理論ではカンドルが群に代わりうる役割を担う代数であることがいくつかの観点から知られていたが、今回のカンドルを用いた曲面絡み目の1ハンドルの研究では、群に比べてカンドルの優位性が顕著に現れており意義がある。

研究成果の概要(英文)：For an immersed surface-link, which is a closed surface immersed in Euclidean 4-space, the notion of a normal form was introduced and it was proved that any immersed surface-link can be deformed into a normal form. Using a normal form, we obtain a method of describing immersed surface-links by marked graph diagrams. We also introduced the notion of a ribbon-clasp surface-link as a natural generalization of a ribbon surface-link, and gave a condition for an immersed surface-link to be ribbon-clasp. The tensor product of quandles was defined, and as an application, we gave a method of describing 1-handles attaching to a surface-link. Using the tensor product of a finite quandle, one can easily obtain an invariant of 1-handles attaching to a surface-link.

研究分野：位相幾何学

キーワード：トポロジー 4次元 グラフィクス 曲面結び目 はめ込み曲面絡み目 マーカー付きグラフ図式 カ
ンドル 1ハンドル

1. 研究開始当初の背景

グラフィクスは、研究代表者が2次元ブレイドを表す方法として考案したチャートと呼ばれる図式が始まりで、一般にモノドロミー表現を記述する手法である。J. S. Carter, M. Saitoはそれを2次元結び目(曲面結び目)を表す手法に発展させている。研究代表者は松本幸夫、松本堯生らと種数1のレフシェツ・ファイバー束空間を表す手法としてチャートを発展させて、種数1のレフシェツ・ファイバー束空間の分類に簡潔な証明を与えることに成功した。種数2のレフシェツ・ファイバー束空間のグラフィクス(チャート表示)も導入され、それをを用いて種数2のレフシェツ・ファイバー束空間の安定化定理も得られている。

一方、カンドルは、1982年にD. JoyceとS. Matveevにより導入された代数系であり、結び目の完全不変量である。E. Brieskorn Brieskornは、代数や幾何における様々な現象にカンドルが重要な役割を担うことを示した。R. Fenn, C. Rourke, B. Sandersonによる高次元結び目理論におけるカンドルの研究、研究代表者とCarterらによるカンドルホモロジー理論を皮切りに、いくつかのバリエーションも登場し研究が行われている。

2. 研究の目的

4次元トポロジーにおける二つの基本問題「4次元多様体の分類」と「4次元空間に埋め込まれた曲面(部分多様体)の分類」に、グラフィクスとカンドル理論の観点から取り組むことが、この研究の目的である。

3. 研究の方法

研究分担者および連携研究者の協力を得て4次元空間内に埋め込まれた閉曲面(曲面絡み目)やはめ込まれた閉曲面(曲面絡み目)のグラフィクスを用いた表示方法や不変量の構成、レフシェツ・ファイバー束をはじめとする4次元トポロジー、カンドルとそのホモロジー理論を一般化し、不変量の構成に役立てる。またその周辺に関する研究を行う。これらは、個別の研究打合せやセミナー、研究集会などを通して実行される。

4. 研究成果

4次元ユークリッド空間にはめ込まれた閉曲面(はめ込み曲面絡み目)に対する標準形を定義し、任意のはめ込み曲面絡み目が標準形に変形できることを証明した。これは4次元ユークリッド空間に埋め込まれた閉曲面(曲面絡み目)の標準形に対応する概念であり、後述するマーカー付きグラフ図式によるはめ込み曲面絡み目の表示方法の基礎となる。

リボン・クラスプ曲面結び目の概念を導入し、その特徴付けを1ハンドル手術の言葉で与えた。また、はめ込み曲面絡み目がリボン・クラスプ曲面結び目となる条件を標準形の言葉で表すことにも成功した。

マーカー付きグラフ図式と呼ばれる平面上に描かれた図式で曲面絡み目を表示する方法がある。この方法を用いて、曲面絡み目のステイトモデルを用いた不変量の構成を行った。Kaufman多項式不変量の特殊ケースを導くLipsonのステイトモデルをマーカー付きグラフ図式に拡張した時に、基本変形(吉川変形)で状態和が不変となるための条件を具体的に示した。さらに、この条件を満たす2つの設定について不変量の性質を調べたところ、一方は曲面の向き付け可能性は反映され、他方はそれを反映しないことがわかった。このことは、同一のモデルを用いても拡張の過程で用いた設定によって異なる性質の不変量が導かれることを示しており、今後の不変量構成の研究における指標となる。

マーカー付きグラフ図式による表示方法をはめ込み曲面絡み目の場合に拡張した。曲面絡み目の場合では、マーカーでの平滑化で得られる2種類の絡み目図式が自明な絡み目を表すことが条件であった。我々のアイデアは、はめ込み曲面絡み目のマーカー付きグラフ図式として、

それらの絡み目図式が H 自明と呼ばれる絡み目を表す図式にまで拡張した点である。はめ込み曲面絡み目の場合の基本変形(吉川変形)に対応する変形については今後の研究課題であるが、候補の一つとなる変形を与えた。

カンドルのテンソル積の概念を導入し、その応用として曲面絡み目に接着する 1 ハンドルを扱う方法を開発した。Boyle の群を用いた方法は曲面が向き付け可能で連結な場合に限定されていたが、この方法では曲面が向き付け不可能な場合や曲面が非連結なときでも利用することができる。また 1 ハンドルの不変量も構成しやすい特徴がある。

H 自明な絡み目の成分数が少ないケースについて、リングモーション群という H 自明絡み目が 4 次元空間内を運動する様子を表す群の群表示を与えることに成功した。これは 4 次元空間の中でリングの連続的な運動がなす群であり、古典次元のブレイドの拡張であるとともに仮想ブレイド群の拡張にもなっている。

カンドルを用いた不変量の研究では、Carter 達が導入した捻れカンドルコサイクル不変量と Cheng-Gao が導入した正カンドルコサイクル不変量の両方を通常の意味のシャドーカンドルコサイクル不変量として自然に解釈する方法を発見した。また、その応用として捻れカンドルコサイクル不変量の増強版を構成した。

双カンドルは 2 種類の演算をもつカンドルの一般化である。特に、多重共役双カンドルはハンドル結び目とも相性がよい。分担者の大城佳奈子を含む複数の研究者とともに、双カンドルの 2 次元 (3 次元) コサイクルから、その双カンドルに付随した多重共役双カンドルの 2 次元 (3 次元) コサイクルを導く方法を与えた。今後は具体例の構成が課題となる。

レフシェツ・ファイバー空間のモノドロミーの研究などで交換子関係式がしばしば登場する。doodle は、R. Fenn と P. Taylor が 1979 年に導入した概念で、自由群の交換子関係式を導くなどの応用がある。doodle 図式から自由群の交換子関係式を導く方法において、交換子関係式に関する基本操作と doodle 図式における基本操作の間の対応を与えることに成功した。doodle 図式をチャートと見なして、モノドロミーに与える影響を読み取ることに対応している。グラフィックスの有効性が示される例である。doodle 図式は球面上の図式であるが、一般種数の曲面のケースに拡張を行い、それらが仮想交差を許した平面上の doodle (仮想 doodle) と自然に対応することもわかった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 2 件)

S. Kamada, A. Kawauchi, Jieon Kim and Sang Youl Lee, Presentation of immersed surface-links by marked graph diagrams, J. Knot Theory Ramifications, 27 (2018), 1850052 (10 pages), 査読有

S. Kamada, A. Kawauchi, Jieon Kim and Sang Youl Lee, Biquandle cohomology and state-sum invariants of links and surface-links, J. Knot Theory Ramifications, 27 (2018), 1843016 (37 pages), 査読有

A. Ishii, M. Iwakiri, S. Kamada, J. Kim, S. Matsuzaki and K. Oshiro, Biquandle (co)homology and handlebody-links, J. Knot Theory Ramifications, 27 (2018) 1843011 (33 pages), 査読有

A. Bartholomew, R. Fenn, N. Kamada and S. Kamada, Doodles on surfaces, J. Knot Theory Ramifications, 27 (2018), 1850071 (26 pages), 査読有

A. Ishii, M. Iwakiri, S. Kamada, J. Kim, S. Matsuzaki and K. Oshiro, A multiple conjugation biquandle and handlebody-links, Hiroshima Math. J., 48 (2018), 89-117, 査読有

H. Endo and S. Kamada, Counting Dirac braid relator and hyperelliptic Lefschetz fibrations, Transactions of London Mathematical Society, 4 (2017), 72-99, 査読有

S. Kamada and T. Matumoto, Chart descriptions of regular braided surfaces, *Topology Appl.*, 230 (2017), 218--232, 査読有

S. Kamada and K. Kawamura, Ribbon-clasp surface-links and normal forms of immersed surface-links, *Topology Appl.*, 230 (2017), 181--193, 査読有

Y. Joung, S. Kamada, A. Kawauchi and S. Y. Lee, Polynomial of an oriented surface-link diagram via quantum A_2 invariant, *Topology Appl.*, 231 (2017) 159--185, 査読有

T. Kanenobu and S. Komatsu, Enumeration of ribbon 2-knots presented by virtual arcs with up to four crossings, *J. Knot Theory Ramifications*, 26 (2017), 1750042 (41 pages), 査読有

H. Endo and A. Pajitnov, On the Morse-Novikov number for 2-knots, *Osaka J. Math.*, 54 (2017), 723-734, 査読有

T. Hayashi, T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh, The palette numbers of torus knots, *J. Knot Theory Ramifications*, 26 (2017), 1750060 (9 pages), 査読有

S. Kamada, Hiroshi Tamaru and Koshiro Wada, On classification of quandles of cyclic type, *Tokyo J. Math.* 39 (2016), 157--171, 査読有

R. I. Baykur and S. Kamada, Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera, *J. Math. Soc. Japan*, 67 (2015), 877--901, 査読有

S. Kamada, V. Lebed and K. Tanaka, The shadow nature of positive and twisted quandle cocycle invariants of knots, *J. Knot Theory Ramifications*, 24 (2015), 1540001 (15 pages), 査読有

Y. Joung, S. Kamada and S. Y. Lee, Applying Lipson's state models to marked graph diagrams of surface-links, *J. Knot Theory Ramifications*, 24 (2015), 1540003 (18 pages), 査読有

S. Kamada, J. Kim and S. Y. Lee, Computations of quandle cocycle invariants of surface-links using marked graph diagrams, *J. Knot Theory Ramifications*, 24 (2015), 1540010 (35 pages), 査読有

H. Endo and S. Kamada, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, *Topology Appl.*, 196 (2015), 416--430, 査読有

J. S. Carter and S. Kamada, Three-dimensional braids and their descriptions, *Topology Appl.*, 196 (2015), 510--521, 査読有

H. Endo, I. Hasegawa, S. Kamada and K. Tanaka, Charts, signatures, and stabilizations of Lefschetz fibrations, *Geom. Topol. Monogr.*, 19 (2015), 237--267, 査読有

[学会発表](計58件)

T. Kanenobu, Twisted Alexander polynomial of a ribbon 2-knot, 国際会議「The 14th East Asian Conference on Geometric Topology」, 2019

S. Kamada, Two-dimensional braids, their graphical description and application to knot theory, 国際会議「The 2018 International Conference of the Honam-Youngnam Mathematical Societies」, 2018

S. Kamada, On surfaces immersed in 4-space, 国際会議「Four Dimensional Topology」, 2018

S. Kamada, Multiplication of surface-links, 国際会議「The 13th East Asian School of Knots and Related Topics」, 2018

S. Kamada, Doodles on surfaces, 国際研究集会「The 4th Russian-Chinese Conference

on Knot Theory and Related Topics」, 2017

H. Endo, Stabilization theorems for Lefschetz fibrations, 2017 Taiwan Mathematical Society Annual Meeting, 2017

佐藤進, リボン曲面タングルと曲面絡み目のダブル, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会, 2017

K. Yasui, Exotic Stein fillings of contact 3-manifolds, The Third Pacific Rim Mathematical Association Congress, 2017

S. Kamada, Classification of 1-handles attaching to surface-links using quandles, 国際研究集会「2016 International Workshop on Low-dimensional Topology in Dalian」, 2016

S. Kamada, Braid presentation of surface-links in 4-space, 国際会議「The Asian Mathematical Conference 2016」, 2016

S. Kamada, Tensor products of quandles and classifying 1-handles attaching to surface-links, 国際研究集会「T(opology) Days in Caen II」, 2016

S. Kamada, Clasp-ribbon surface-links in 4-space, 国際研究集会「Knots in Washington XLIII」, 2016

A. Kawachi, On a cross-sectional link of an immersed sphere-link in 4-space, 国際研究集会「2016 International Workshop on Low-dimensional Topology in Dalian」, 2016

遠藤久顕, 超楕円の Lefschetz ファイバー空間と Dirac ブレイド, 研究集会「微分トポロジー-16」, 2016

S. Kamada, Quasibras, branched braids and branched links, AMS-EMS-SPM Joint Meeting, 2015

S. Kamada, Graphic description of monodromy representations, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2015

S. Kamada, On braid description of surface-links in the 4-space, 国際会議「The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications」, 2015

S. Kamada, Quandle presentation of 1-handles attached to surface-knots, 国際会議「The Tenth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2015

S. Kamada, Cords attached to links and surface-links and quandles, 国際研究集会「2014 TAPU Workshop on Knot Theory and Related Topics」, 2014

S. Kamada, Hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilizations, 国際会議「Knots and Low Dimensional Manifolds」, 2014

〔図書〕(計2件)

大槻 知忠、共立出版、結び目の不変量、2015、288

Seiichi Kamada、Springer、Surface-Knots in 4-Space: An Introduction、2017、212

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：河内 明夫

ローマ字氏名：(KAWAUCHI, akio)

所属研究機関名：大阪市立大学

部局名：大学院理学研究科

職名：特任教授

研究者番号(8桁): 00112524

研究分担者氏名: 金信 泰造

ローマ字氏名:(KANENOBU, taizo)

所属研究機関名: 大阪市立大学

部局名: 大学院理学研究科

職名: 教授

研究者番号(8桁): 00152819

研究分担者氏名: 大槻 知忠

ローマ字氏名:(OHTSUKI, tomotada)

所属研究機関名: 京都大学

部局名: 数理解析研究所

職名: 教授

研究者番号(8桁): 50223871

研究分担者氏名: 遠藤 久顕

ローマ字氏名:(ENDO, hisaaki)

所属研究機関名: 東京工業大学

部局名: 理学院

職名: 教授

研究者番号(8桁): 20323777

研究分担者氏名: 佐藤 進

ローマ字氏名:(SATO, shin)

所属研究機関名: 神戸大学

部局名: 理学研究科

職名: 教授

研究者番号(8桁): 90345009

研究分担者氏名: 安井 弘一

ローマ字氏名:(YASUI, kouichi)

所属研究機関名: 大阪大学

部局名: 情報科学研究科

職名: 准教授

研究者番号(8桁): 70547009

研究分担者氏名: 大城 佳奈子

ローマ字氏名:(OSHIRO, kanako)

所属研究機関名: 上智大学

部局名: 理工学部

職名: 准教授

研究者番号(8桁): 90609091

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。