2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １７ 日現在

機関番号：３４３１０
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６２８７０１５

研究課題名（和文）可積分系の漸近解の構造とWKB解析

研究課題名（英文）Structure of asymptotic solutions of integrable systems and WKB analysis

研究代表者
竹井　義次（Takei, Yoshitsugu）

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号：００２１２０１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　7,900,000円

研究成果の概要（和文）：非線型や差分方程式を含めた偏微分方程式系への完全ＷＫＢ解析の拡張を目指して、種々の可積分系や超幾何系を完全ＷＫＢ解析の視点から考察した。非線型方程式に対する変わり点の交差現象に対する理解が深まると共に、ホロノミック系の制限に伴って現れる「非遺伝性の二重変わり点」の発見、離散パンルベ方程式のストークス現象を表す接続公式の具体形の決定、楕円函数を利用したパンルベ方程式のインスタントン型形式解の解析的意味付けに関するアイデア、等の新しい知見が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
線型常微分方程式に比して、非線型方程式や差分方程式、さらに多変数の偏微分方程式系に対する漸近解析はまだまだ発展途上である。本研究で得られた種々の成果は、いずれもこうしたより一般の微分差分方程式系への完全ＷＫＢ解析の拡張に向けて大きな一歩となるものと考えられる。特に、楕円函数を利用したパンルベ方程式のインスタントン型形式解の解析的意味付けに関するアイデアは、非線型方程式に対する漸近解析を革新する可能性を秘めた重要な成果である。

研究成果の概要（英文）：To extend the exact WKB analysis to systems of partial differential equations including nonlinear equations and difference equations, we study several integrable systems and hypergeometric systems from the viewpoint of the exact WKB analysis. Consequently we obtain deeper understanding for coalescing phenomena of turning points for nonlinear equations and, furthermore, the following new results are also obtained: discovery of the appearance of non-hereditary double turning points associated with the restriction of holonomic systems, determination of the explicit form of connection formulas for Stokes phenomena of discrete Painleve equations, and a new idea about the analytic interpretation of instanton-type formal solutions of Painleve equations in terms of elliptic functions.

研究分野：数物系科学

キーワード：解析学　関数方程式論　漸近解析　代数解析　可積分系　ホロノミック系　パンルヴェ方程式　ＷＫＢ解析

１．研究開始当初の背景

発散級数であるＷＫＢ解にボレル総和法を適用するというアイデアは、A. Voros (Ann. Inst. H. Poincaré, 39 巻, 1983) 及び H. Silverstone (Phys. Rev. Lett., 55 巻, 1985) に始まる。彼等の仕事を J. Ecalle の再生函数の理論の枠組で数学的に再構築した F. Pham のグループや我々のグループ等の貢献により、２階線型常微分方程式の場合の完全ＷＫＢ解析はほぼ完成を見た (cf. T. Kawai and Y. Takei: 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008)。その後、主として我々のグループにより完全ＷＫＢ解析の高階線型常微分方程式やパンルベ型の非線型常微分方程式への拡張が図られ、単純変わり点における高階パンルベ方程式の解の構造定理等の諸結果が得られた。しかし、Berk-Nevins-Roberts (J. Math. Phys., 23 巻, 1982) により指摘された「新しいストークス曲線」や、その始点として超局所解析学的考察に基づき導入された「仮想的変わり点」(T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: Analyse algébrique des perturbations singuliéres, I, 1994) の問題は未だ完全な解決には至らず、更に、完全ＷＫＢ解析の多変数化、即ち偏微分方程式（系）への拡張については、依然ほとんど手つかずの状態であった。

こうした状況の中、B. Dubrovin (Comm. Math. Phys., 267 巻, 2006) はその頃、特異摂動型の KdV 方程式の漸近解に対して次のような興味深い結果を示した。すなわち、『KdV 方程式の（特異摂動パラメータに関する）漸近解の主部は消散項を持たない Burgers 方程式を満たし、衝撃波を引き起こす。「勾配カタストロフ」と呼ばれるこうした衝撃波が現れる点の近傍では、KdV 方程式の漸近解の挙動は４階のＩ型パンルベ方程式の解により記述される。』Dubrovin によるこの結果は、可積分系との関連で現れる偏微分方程式の典型例である KdV 方程式の漸近解析が、常微分方程式の漸近解析を基礎にして展開し得ることを強く示唆する。

一方、廣瀬 (Publ. RIMS, Kyoto Univ., 50 巻, 2014) は２変数超幾何系の完全ＷＫＢ解析を考察し、こうした系では「変わり点の交差」と呼ぶべき現象が起きること、しかも、（Pearcey 積分が満たす方程式なので）Pearcey 系と呼ばれる最も退化した２変数超幾何が一般の２変数線全積分可能系の「変わり点の交差」が起きる点での標準形を与えることを証明した。この廣瀬の結果は、線型に限ってではあるが、多変数完全積分可能系の完全ＷＫＢ解析への道を切り開くものである。

これらの結果を踏まえ、本研究では、Dubrovin の結果を完全ＷＫＢ解析の視点から見直し、さらにそれを廣瀬の結果と結び付けることにより、偏微分方程式（系）の完全ＷＫＢ解析に本質的な進展をもたらすことを目指した。

２．研究の目的

本研究の目的は、「廣瀬の結果の非線型版は何か」という自然な問いに対する答えを見出し、それによって Dubrovin の結果に完全ＷＫＢ解析的な解釈を与えると同時に、非線型を含めた偏微分方程式系への完全ＷＫＢ解析の拡張に大きな進展をもたらすことである。

（１）研究開始以前の予備的な考察によって、我々は４階のＩ型パンルベ方程式が非線型の場合の「変わり点の交差」が起きる点での標準形を与えており、更に勾配カタストロフの点では KdV 方程式についても「変わり点の交差」という現象が起きているという予想を得ていた。この予想を踏まえて、廣瀬の結果の非線型版にあたる定理を証明することが本研究の第一の具体的目標である。小池 (RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2 巻, 2007, 及び B5 巻, 2008) により示されたように、高階パンルベ方程式は、パンルベ方程式の多変数版であるガルニエ系の適当な１次元複素直線への制限として得られる。例えば、４階のＩ型パンルベ方程式は最も退化した２変数ガルニエ系の制限である。そこで、具体的なガルニエ系をいくつか取り上げて、それらに対して「変わり点の交差」という現象がどの程度起きるのか、また「変わり点の交差」が起きる点で最も退化した２変数ガルニエ系への変換が可能かどうかを考察し、うまく行けばそれを一般的な結果に拡張する。

（２）第二の目標は、勾配カタストロフの点において KdV 方程式に「変わり点の交差」という現象が起きているかどうかを調べることである。KdV 方程式のように可積分系との関連で現れる偏微分方程式の場合、ラックス対を通じてある完全積分可能系が対応し、その構造から自然に変わり点が定義できると考えられる。KdV 方程式や、より一般に保存則を記述する非線型双曲型方程式のハミルトン摂動として与えられる偏微分方程式に対して、勾配カタストロフと「変わり点の交差」がどの程度対応するかを検証する。

これらの問題の考察を通じて、偏微分方程式系の完全ＷＫＢ解析の一般論の枠組が次第に定まってくることが期待される。「変わり点の交差」という現象を一般的な枠組で論じる中で、偏微分方程式系の完全ＷＫＢ解析の基礎理論の整備を図ることが本研究の最終目標である。

３．研究の方法

本研究の遂行にあたっては、完全ＷＫＢ解析の視点からの問題の考察と同時に、可積分系やガルニエ系に対する理解が必要不可欠である。この点に留意しながら、Dubrovin の結果に完全ＷＫＢ解析的な解釈を与えることを目標としつつ、完全ＷＫＢ解析の多変数化を目指して、研究協力者達と定期的に行うセミナーや討論を研究の中心に据えて研究を進める。以下、「２．研

究の目的」の項で述べた具体的な研究目標の達成のために、どのように研究を進めて行くかについて、項目毎に述べる。
（１）廣瀬の結果の非線型版の定理の証明に向けては、まず例として４階の II 型パンルベ方程式を考え、「変わり点の交差」が起きている点の近傍でそれが４階の I 型パンルベ方程式に変換できるかどうかを調べる。より正確には、ガルニエ系の適当な１次元複素直線への制限が高階パンルベ方程式を与えるという既述の小池の結果（RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2 巻, 2007, 及び B5 巻, 2008）に基づいて、それぞれの高階パンルベ方程式に対応する２変数退化ガルニエ系の間にＷＫＢ解析的な意味での変換が構成できるかどうかを考察する。４階の I 型パンルベ方程式に対応する２変数退化ガルニエ系の幾何学的構造は、線型の場合の Pearcey 系と類似の標準形にふさわしい「簡単な」ものであり、こうした変換が構成できる可能性は高い。この場合の変換は以前に河合隆裕氏と示した単純変わり点における I 型パンルベ方程式への変換の一般化とも見なすことが可能で、その時の議論から判断して、実際の変換の構成にあたっては二つのガルニエ系にモノドロミー保存変形を通じて付随するラックス対の間の変換が鍵となると考えられる。ラックス対は線型の微分方程式系であるので、これまでに得た線型常微分方程式に関する知見を最大限活用して、変換の構成に取り組む。
（２）次に、こうした「変わり点の交差」や４階の I 型パンルベ方程式への変換がどの程度普遍的な現象であるのかを検証するために、他の高階パンルベ方程式やそれに対応する退化ガルニエ系の例をいくつか取り上げて、実際に「変わり点の交差」という現象が起きるのか、また（４階の I 型パンルベ方程式に対応する）最も退化した２変数退化ガルニエ系への変換が可能であるのかどうかを調べる。いくつかの例を解析した結果、そこに共通の構造が見えてくれば、一般的な定理としてまとめる。
（３）更に、ここ迄の解析が順調に進展すれば、次に勾配カタストロフの点において KdV 方程式に「変わり点の交差」という現象が起きているかどうかを調べる。残念ながら、偏微分方程式に対する変わり点の定義は知られていない。しかし KdV 方程式のように可積分系との関連で現れる偏微分方程式の場合には、それに付随するラックス対の構造から自然に変わり点が定義できるのではないかと考えられる。KdV 方程式や、保存則を記述する双曲型方程式のハミルトン摂動として与えられるより一般の偏微分方程式に対して、勾配カタストロフと「変わり点の交差」という現象がどの程度対応するかを検証する。
（４）以上の議論を踏まえ、大きなパラメータを含んだ偏微分方程式系の完全ＷＫＢ解析の基礎理論の整備を目指す。変わり点の定義から始めて、完全ＷＫＢ解析において重要なストークス曲面、及びストークス曲面を越える際の接続公式等について、基礎理論の整備を図る。
（５）廣瀬の結果で標準形の役割を演じた Pearcey 系の第１変数を特殊化すれば、Berk-Nevins-Roberts が新しいストークス曲線との関連で論じた３階の常微分方程式が得られる。更に、「変わり点の交差」が起きる点では仮想的変わり点も同時に通常の変わり点にぶつかる。以上の事実は、変わり点の交差現象が高階常微分方程式の仮想的変わり点や新しいストークス曲線の問題とも深く関係していることを意味する。これを踏まえて、廣瀬の結果やここまでの研究で得られた知見を、高階常微分方程式の仮想的変わり点の解析に応用してみたい。
　以上のどの項目についても、超局所解析学の視点からの考察や、高階パンルベ方程式とガルニエ系の間の関係が研究の進展の鍵になると考えられる。前者については、研究協力者の神本晋吾、青木貴史、河合隆裕の各氏と、また後者については研究協力者の小池達也、廣瀬三平、Nalini Joshi の各氏と、それぞれセミナーでの討論やメール等を通じて緊密な連絡を取り合いながら研究を進めて行く。

４．研究成果

　本研究を遂行する中で、「２．研究の目的」や「３．研究の方法」で述べた具体的目標に関して、着実にいくつかの成果が得られた。更に、それらに関連する他の研究課題についても、思いがけない大きな研究の進展が見られた。こうした研究成果について、以下では項目毎にまとめて記述する。
（１）廣瀬の結果の非線型版、すなわち、４階の I 型パンルベ方程式が非線型方程式の場合の「変わり点の交差」が起きる点での標準形を与える、という予想に関しては、４階の II 型パンルベ方程式に対応する２変数退化ガルニエ系に対して、変わり点の交差現象が起きる点の近くで（４階の I 型パンルベ方程式に対応する）最も退化したガルニエ系への変換を構成することにほぼ成功した。残念ながら一般の非線型方程式に対する変換の構成や、勾配カタストロフにおける KdV 方程式に変わり点の交差現象が起きているかどうかの検証にまでは至らなかったが、一般的な定理を得る足掛かりは出来たと思われる。
（２）大きなパラメータを含んだ偏微分方程式系（ホロノミック系）の完全ＷＫＢ解析については、廣瀬三平氏や河合隆裕氏と共同で、２変数超幾何方程式系をはじめとするいくつかの具体的なホロノミック系の解析に取り組んだ。その中で、ホロノミック系の一部の変数を制限して得られる高階常微分方程式に対しては、「非遺伝性の二重変わり点」と呼ばれる非常に特徴的な変わり点が現れることが見出された。通常は解のストークス現象に関係しないこの不活性な二重変わり点は、制限した常微分方程式の低階項に摂動を加えると活性化される。さらに、非遺伝性の二重変わり点はこの常微分方程式のスペクトル曲線に新たな周期をもたらし、この周

期が常微分方程式のストークス幾何に新しいタイプの退化を引き起こすことも具体的な方程式の解析を通じて示された。こうした新しい現象の発見は、ホロノミック系の完全ＷＫＢ解析が想像以上に豊かな構造を有していることを示唆している。
（３）他方、Nalini Joshi 氏（シドニー大学、豪）との共同研究によって、離散パンルベ方程式の漸近解の構造解析に新たな展開がもたらされた。すなわち、離散パンルベ方程式に対しても完全ＷＫＢ解析の視点からのアプローチが可能であり、高階の常微分方程式と同様に仮想的変わり点や新しいストークス曲線も含んだ形でそのストークス幾何が定義できること、さらに、離散パンルベ方程式を通常の微分パンルベ方程式と連立させて一つの可積分系として捉えることにより、そうしたストークス曲線上でのストークス現象についても明示的な解析が可能であること、等が明らかになった。例えば、ベックルンド変換を通じてＩＩ型の微分パンルベ方程式に付随する変形Ｉ型離散パンルベ方程式については、その超級数（transseries）解に対するストークス現象を表す接続公式の具体形が決定された。また、この結果のさらなる一般化を目指して離散パンルベ方程式のインスタントン型形式解の構成にも取り組み、バーコフ標準形への変換を微分・差分方程式系に拡張することによって、離散パンルベ方程式に対してもインスタントン型形式解が存在することを示すのに成功した。
（４）上記の離散パンルベ方程式のインスタントン型形式解の構成への取り組みの中から、「バーコフ標準形を通じてパンルベ方程式から楕円函数の満たす微分方程式への変換を構成し、それを利用してインスタントン型形式解に解析的な意味付けを行う」という新たなアイデアが得られた。インスタントン型形式解はストークス現象や大域的な漸近解析を論じる際に非常に重要な役割を演じるが、その解析的な意味付けはこの分野における 20 年来の懸案の問題である。この問題への解決の糸口が見つかったという意味で、この新たなアイデアが得られたことは完全ＷＫＢ解析の研究にとって実に大きな進展である。このアイデアを実現させるべく、楕円函数の方程式への変換論とパンルベ方程式の初期値空間やモノドロミー保存変形との関連、及びこのアイデアの雛型と呼ぶべきリッカチ方程式への変換論における変換級数のボレル総和可能性等について、いくつか予備的考察を行った。
（５）高階常微分方程式の仮想的変わり点やホロノミック系の完全ＷＫＢ解析というテーマに関連して、大学院生（当時）の茂木貴宏君と共同研究を行い、２階の方程式から中間畳み込み（middle convolution）によって得られる高階常微分方程式に対して、そのストークス曲線を決定する新たな処方箋を与えた。これは、以前に得られていたラプラス変換に関する完全最急降下法を、中間畳み込みにまで拡張するものである。ホロノミック系や高階常微分方程式の仮想的変わり点等の解析において、今後威力を発揮することが期待される。
　このように、当初の研究目標については、勾配カタストロフの解析等、計画通りに進まなかった部分はあるものの、非遺伝性の二重変わり点が発見されるなど、まずまず順調に研究は進展した。それ以上に、離散パンルベ方程式の解析の進展や、楕円函数を用いたパンルベ方程式のインスタントン型形式解の解析的な意味付けに関する新たなアイデアの獲得等、関連する研究が予想以上に大きく進展した。達成できなかった課題の解決や、こうした新しい知見をより発展させることは今後の課題であるが、種々の重要な研究成果が得られたという意味で本研究は十分に成功だったと思われる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計８件）

[1] Sampei Hirose, Takahiro Kawai, Shinji Sasaki and Yoshitsugu Takei, On the Stokes geometry of perturbed tangential Pearcey systems, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 印刷中, 査読有
[2] Yoshitsugu Takei, Extension of the exact steepest descent method to the middle convolution, 数理解析研究所講究録, 2101 巻, 2019, 146-152, 査読無
DOI: なし
[3] Nalini Joshi and Yoshitsugu Takei, On Stokes phenomena for the alternate discrete PI equation, in "Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations", 2017, 369-381, 査読有
DOI: 10.1007/978-3-319-52842-7_10
[4] Yoshitsugu Takei, WKB analysis and Stokes geometry of differential equations, in "Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations", 2017, 263-304, 査読有
DOI: 10.1007/978-3-319-52842-7_5
[5] Nalini Joshi and Yoshitsugu Takei, Toward the exact WKB analysis of discrete Painlevé equations, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B61 巻, 2017, 83-96, 査読有
DOI: なし
[6] Takahiro Moteki and Yoshitsugu Takei, Stokes geometry of higher order linear ordinary differential equations and middle convolution, Advances in Mathematics, 310 巻, 2017, 327-376, 査読有

DOI: 10.1016/j.aim.2017.02.006
[7] Yoshitsugu Takei, On the multisummability of WKB solutions of certain singularly perturbed linear ordinary differential equations, Opuscula Mathematica, 35 巻, 2015, 775-802, 査読有
DOI: 10.7494/OpMath.2015.35.5.775
[8] Yoshitsugu Takei, On the fourth order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B52 巻, 2014, 301-316, 査読有
DOI: なし

〔学会発表〕(計２８件)

[1] Yoshitsugu Takei, On the instanton-type expansions for Painlevé transcendents and elliptic functions, 「力学系幾何セミナー」, アンジェ大学（フランス）, 2019 年
[2] 竹井 義次, パンルヴェ方程式のインスタントン解をめぐって, 「金沢大学数理学談話会」, 金沢大学, 2019 年
[3] Yoshitsugu Takei, On the instanton-type expansion of solutions and the transformation theory of differential equations, 「超幾何方程式研究会 2019」, 神戸大学, 2019 年
[4] Yoshitsugu Takei, Stokes phenomena and connection formulas for some discrete Painlevé equations, 「Symmetries and Integrability of Difference Equations 13」, JR Hakata City Conference Rooms（福岡市）, 2018 年
[5] Yoshitsugu Takei, On the instanton-type expansion of solutions and the transformation theory of differential equations, RIMS 共同研究（公開型）「代数解析学の諸問題」, 京都大学数理解析研究所, 2018 年
[6] Sampei Hirose, Takahiro Kawai, Shinji Sasaki and Yoshitsugu Takei, Stokes geometry of ordinary differential equations with double turning points related to confluent hypergeometric equations of two variables, RIMS 共同研究（公開型）「代数解析学の諸問題」, 京都大学数理解析研究所, 2018 年
[7] Yoshitsugu Takei, On the instanton-type expansions for Painlevé transcendents and elliptic functions, 「Complex Differential and Difference Equations」, ベドレボ数学研究・会議センター（ポーランド）, 2018 年
[8] Yoshitsugu Takei, On the instanton-type expansions for Painlevé transcendents and elliptic functions, 「Formal and Analytic Solutions of Partial Differential Equations 2018」, パドヴァ大学（イタリア）, 2018 年
[9] 竹井 義次, 楕円函数やパンルヴェ特殊函数のインスタントン展開をめぐって, 日本数学会年会函数方程式論分科会特別講演, 東京大学, 2018 年
[10] 竹井 義次, パンルヴェ方程式の完全 WKB 解析再訪, 「第 33 回松山キャンプ」, 山口大学, 2018 年
[11] 竹井 義次, Some recent topics in the exact WKB analysis related to the exact steepest descent method, RIMS 共同研究（公開型）「超局所解析と漸近解析」, 京都大学数理解析研究所, 2017 年
[12] 廣瀬 三平, 河合 隆裕, 竹井 義次, On virtual turning points originating from a non-hereditary turning point, RIMS 共同研究（公開型）「超局所解析と漸近解析」, 京都大学数理解析研究所, 2017 年
[13] Yoshitsugu Takei, Stokes geometry of higher order ODEs and middle convolution, 「Asymptotic and computational aspects of complex differential equations」, E. De Giorgi 数学研究センター（イタリア）, 2017 年
[14] Takahiro Kawai and Yoshitsugu Takei, On virtual turning points, 「Resurgence at Kavli IPMU」, 東京大学 Kavli IPMU, 2016 年
[15] 竹井 義次, 微分差分方程式系のインスタントン解の構成について, 「第 23 回超局所解析と古典解析」, 別府市ふれあい広場サザンクロス（大分県別府市）, 2016 年
[16] Sampei Hirose, Takahiro Kawai and Yoshitsugu Takei, On some recent results in the theory of virtual turning points, RIMS 研究集会「超局所解析と特異摂動論の新展開」, 京都大学数理解析研究所, 2016 年
[17] Yoshitsugu Takei, Exact WKB analysis for continuous and discrete Painlevé equations, 「可積分系・漸近解析セミナー」, 国際高等研究所（イタリア）, 2016 年
[18] Yoshitsugu Takei, On instanton-type formal solutions of singular-perturbative Hamiltonian systems with several time variables, 「Formal and Analytic Solutions of Partial Differential Equations」, リスボン大学（ポルトガル）, 2016 年
[19] Yoshitsugu Takei, Exact WKB analysis for continuous and discrete Painlevé Equations, 「Resurgence in Gauge and String Theories」, 高等工業大学（ポルトガル）, 2016 年
[20] Yoshitsugu Takei, Toward the exact WKB analysis of systems of differential-difference equations, RIMS 共同研究「Exponential Asymptotics of Difference and Differential Equations」, 京都大学数理解析研究所, 2016 年

[21] Yoshitsugu Takei, Exact WKB analysis for continuous and discrete Painlevé equations, 「Geometry of Wall-Crossing, Deformation Quantization and Resurgent Analysis」, 東北大学知の館, 2016 年
[22] 竹井 義次, 離散パンルベ方程式のストークス現象について, 「第 22 回超局所解析と古典解析」, 富山県民会館（富山市）, 2015 年
[23] Yoshitsugu Takei, On the exact WKB analysis of discrete Painlevé equations, RIMS 研究集会「Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory」, 京都大学数理解析研究所, 2015 年
[24] Yoshitsugu Takei, WKB analysis and Stokes geometry of differential equations, 「Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations」, ベドレボ数学研究・会議センター（ポーランド）, 2015 年
[25] Yoshitsugu Takei, WKB analysis for the discrete Painlevé equations, 「Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations」, ベドレボ数学研究・会議センター（ポーランド）, 2015 年
[26] 竹井 義次, パンルヴェ方程式と離散パンルヴェ方程式, 「大阪梅田微分方程式セミナー」, 関西学院大阪梅田キャンパス（大阪市）, 2015 年
[27] 竹井 義次, 非線型変わり点の合流現象と４階 I 型パンルベ方程式, 「第 21 回超局所解析と古典解析」, 松藤プラザ「えきまえ」（長崎市）, 2014 年
[28] 竹井 義次, The fourth order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points,「第 5 回ハミルトン系とその周辺」, 金沢大学サテライトプラザ（金沢市）, 2014 年

〔図書〕（計３件）

[1] Takashi Aoki, Naofumi Honda, Kiyoomi Kataoka, Tatsuya Koike, and Yoshitsugu Takei (eds.), Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory, RIMS, Kyoto University, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, Vol. B61, 2017, 253 ページ
[2] Naofumi Honda, Takahiro Kawai and Yoshitsugu Takei, Springer-Verlag, 『Virtual Turning Points』, SpringerBriefs in Mathematical Physics, Vol. 4, 2015, 126 ページ（担当ページ：79-119）, ISBN: 978-4-431-55701-2
[3] Yoshitsugu Takei (eds.), Exponential Analysis of Differential Equations and Related Topics, RIMS, Kyoto University, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, Vol. B52, 2014, 316 ページ

６．研究組織

(1)研究分担者
（なし）

(2)研究協力者
研究協力者氏名： 神本 晋吾
ローマ字氏名： （KAMIMOTO, Shingo）

研究協力者氏名： 青木 貴史
ローマ字氏名： （AOKI, Takashi）

研究協力者氏名： 小池 達也
ローマ字氏名： （KOIKE, Tatsuya）

研究協力者氏名： 河合 隆裕
ローマ字氏名： （KAWAI, Takahiro）

研究協力者氏名： 廣瀬 三平
ローマ字氏名： （HIROSE, Sampei）

研究協力者氏名： Nalini Joshi
ローマ字氏名： （JOSHI, Nalini）