

令和 2 年 5 月 23 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2019

課題番号：26287018

研究課題名(和文)量子モノドロミー保存変形とラックス形式

研究課題名(英文)Quantum isomonodromic deformation and Lax formulation

研究代表者

山田 泰彦 (Yamada, Yasuhiko)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：00202383

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、パンルヴェ系を雛形とするモノドロミー保存変形方程式について、高階化、多変数化などの種々の拡張を探求した。特に、ラックス形式も含めた幾何学的理論を整備すると共に、パデ近似・パデ補間を用いたモノドロミー保存変形、特にそのラックス形式の構成を推進し、モノドロミー保存変形の量子化、対称性、特殊解等について考察した。合わせて、共形場理論やゲージ理論との対応についても研究し、これらの理論とモノドロミー保存変形との対応についての理解を前進させた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モノドロミー保存変形は、19世紀のリーマンの研究を端緒とする重要な対象であり、そこに現れる関数は21世紀の特殊関数を与えるものと期待されてきた。実際、近年の数理物理を含めた研究は、その期待を裏付けるように飛躍的な進展を見せている。本研究は、そうしたモノドロミー保存変形理論について離散化、量子化なども含め、総合的・多角的な研究を目指したものである。得られた成果の中で最も重要なものは、パンルヴェ系(自由度2のモノドロミー保存変形)に関する、離散系連続系を含めた包括的理論の構築である。これは当該分野の研究の基礎を確立した成果として、高い評価を得ている。

研究成果の概要(英文)：In this research, we investigated the various Painleve type equations (or more generally iso-monodromic deformation equations) such as higher order or multivariable extensions. In particular, their geometric theory including the Lax formalism and the construction of the Lax equations based on the method of Pade approximation/interpolations has been developed, and the problems such as quantization, symmetry, special solutions, etc are considered. We also made a progress in the relation among the conformal field theory, gauge theory and iso-monodromic deformations.

研究分野：可積分系

キーワード：モノドロミー保存変形 ラックス形式 パデ法 可積分系 スペクトル曲線 量子化

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究においてその主要な背景となったのは2009年に発表されたAGT対応であった。これは、2次元共形場理論と4次元超対称ゲージ理論の対応であるが、リーマン面のモジュライ空間等の共通の幾何学的背景により、モノドロミー保存変形とも密接に関連する。実際、山田(研究代表者)は本研究に先立って、栗田・藤・菅野・真鍋(名古屋大)との共同研究、および名古屋(金沢大)との共同研究により、微分方程式の場合に、これ等の対応関係を具体的に研究していた。また、代表者と栗田は、2009年にAGT対応のq類似版を定式化したが、その解明に向けて、上記の結果のq差分あるいは楕円差分といった課題が見えてきた。一方で、代表者が中心となって進めていた、パデ近似(およびパデ補間)を応用したモノドロミー保存変形の研究は、その適用の容易さから、種々のモノドロミー保存変形の拡張、特にそのラックス形式の定式化に有効と考えられた。ラックスの線形方程式と量子化は密接に関係しており、これも重要な背景となった。

2. 研究の目的

申請時に記載した研究目的は、パンルヴェ系を離形とするモノドロミー保存変形方程式について、高階化、多変数化などの種々の拡張と、その量子化を探索することであった。特に、ラックス形式の量子化の構成、その対称性、特殊解の解明を目標とした。合わせて、共形場理論やゲージ理論との対応についても平行して研究し、それを手がかりとして、パンルヴェ系の良い一般化および良い量子化を探ることを目的とした。

3. 研究の方法

本研究課題で用いた具体的研究方法は以下の通りである。

(1) モノドロミー保存変形の幾何学的研究の推進:

山田(代表者)は、本研究につながった先の研究において、坂井による離散パンルヴェ方程式の幾何的理論をラックス形式も含める形で一般化すること成功し、モノドロミー保存変形の幾何学的理論を確立した。この観点を一般化することで、多変数の場合を含めた広範なモノドロミー保存変形の幾何学的理論が考えられる。これは量子化の問題や数理物理的応用においても鍵となる視点である。

(2) パデ法の広範な適用:

山田(代表者)が協力者の長尾(明石高専)等と共に推進しているパデ法(パデ近似・パデ補間を用いたモノドロミー保存変形の構成的研究)を、多変数の場合を含めてより広範に適用すること。これにより、様々な離散モノドロミー保存変形のラックス形式の具体例を豊富に構成することが可能となる。

(3) 数理物理との関連の追求:

ゲージ理論や共形場理論等の発展に注意し、その進展を随時取り入れつつ課題解決のヒントとする。同時に、モノドロミー保存変形の知見を生かして、数理物理の進展に寄与することも目指す。

4. 研究成果

本研究の主要な成果は以下の通りである。

(1) 離散パンルヴェ方程式の幾何学的研究:

[内容] 山田(研究代表者)、野海(研究分担者)および梶原(九大)は、幾何学的観点から、連続的および離散的パンルヴェ方程式について包括的に研究した。特に2つの射影直線の直積上の8点の配置に関する幾何学的構造を基礎として、アフィン・ワイル群の双有理表現、パン

ルヴェ方程式、ラックス形式、および超幾何型特殊解を系統的に構成した。これらに関連する過去10年以上にわたる研究の蓄積を整理し、その結果を論文にまとめた。

[研究の位置付けとインパクト・今後の展望] この論文は J. Physics 誌に topical review として掲載された。ゲージ理論との関連から数理物理的関心の高まりもあり、大きなインパクトがあった。また、これまでの研究の系統的な整理に留まらず、新しい結果も含んでおり、この分野の今後の研究の基礎をなすものとして高く評価されている。

(2) パデ法によるq-差分ガルニエ系の研究:

[内容] 山田(研究代表者)と長尾(明石高専)は、パデ法を用いたq-差分ガルニエ系の研究を進め、方程式の簡単化、特殊解の構成等を行った。特殊解としてアップル-ローリセラ関数による表示と一般超幾何関数による表示を得た。副産物として、楕円曲線に付随する離散可積分力学系として知られているQRT系の超楕円曲線への拡張を与えた(Funkcialaj Ekvacioj誌に発表)。さらに、q-ガルニエ系やq-パルヴェ系として、従来の標準的な方向とは異なる変形方向について、従来型と同様の簡潔な方程式も得た(J.Phys.A誌に発表)。これらを含め、パデ法に関する多くの結果の集積を踏まえ、この手法の基本的なアイデアや具体的な計算手法をまとめたモノグラフを執筆した(査読中)。

[研究の位置付けとインパクト・今後の展望] パデ法は、微分の場合に、津田(一橋大)・真野(琉球大)により多変数化されている。その離散化も可能であり、これにより高階・多変数の離散モノドロミー保存変形理論が一層広範囲に進展することが期待される。

(3) 因子化されたラックス形式の対称性の研究:

[内容] q-ガルニエ系に関する上述の研究において、鈴木(近畿大)等による高階q-差分パルヴェ系とq-ガルニエ系との関係が示されたが、さらに、梶原・野海・山田による2002年の結果(q-差分KP方程式の相似簡約による高階パルヴェ系の構成)との関係も明らかにした。こうして現れるラックス形式は因子化された特徴的な構造を持つ。これについて、山田(研究代表者)は、朴(神戸大院生)との共同研究により、その対称性を研究した。この成果は2019年9月の数理解析研究所における研究集会で発表した(論文投稿中)。

[研究の位置付けとインパクト・今後の展望] この結果は、量子群の幾何結晶理論におけるFriedanの最近の結果、及び長谷川(東北大)による量子モノドロミー保存変形の構成に密接に関連しており、今後の進展が期待される。

(4) 楕円差分ガルニエ系の研究:

[内容] 山田(代表者)は、楕円差分ガルニエ系と呼ぶべき方程式系をそのラックス形式と共に構成した。これは、野海・辻本・山田によるパデ法に基づいた楕円差分パルヴェ方程式の研究を多変数に拡張したものである(SIGMA誌に掲載)。

[研究の位置付けとインパクト・今後の展望] この論文の結果を用いて、山田、野海およびS.Ruijsenaars(Leeds大)は、楕円的な量子多体可積分系の重要な例であるvan Diejen模型と楕円差分パルヴェ方程式の対応について共同研究を行い、具体的な対応関係を明らかにした(論文査読中)。これは竹村(中央大)による結果の(1変数における)究極的な一般化に当たる。

(5) その他の研究:

[内容] (a) 山田とOrmerod(カリフォルニア大)は、超離散パルヴェ方程式の多角形構造について研究し、トロピカルなワイル群の作用に対して、簡明な図形的意味を与えた(SIGMA誌に発表)。(b) 2次元共形場理論の相関関数を明示的に与えるネクラソフ関数は、本研究の重要

な研究対象の1つである。山田は、特殊なパラメータにおいて、この関数が満たす線形差分方程式について考察し、部分的な結果を幾つかの研究集会で発表した。

[研究の位置付けとインパクト・今後の展望] これらの結果、離散モノドロミー保存変形理論（の自励的極限）に現れるスペクトル曲線と、ゲージ理論・弦理論で扱われるトーリック図形との対応が一層明瞭となった。ゲージ理論・弦理論への応用が期待される。

（6）国際研究集会における講演：

[内容] 特にtopical review 論文との関連から、国内外の研究集会において講演の機会が多数あり、可能な限り対応して関連分野との情報交換に努めた。特に、モノドロミー保存変形方程式の自励的極限・量子化およびその弦理論・ゲージ理論への応用に関して、数理物理方面の研究者との有益な情報交換を行った。

[研究の位置付けとインパクト・今後の展望] モノドロミー保存変形理論からの知見を提供することにより、数理物理分野の進展に貢献した。この方面は今後も進展が予想される。

（7）国際研究集会の開催：

[内容] 差分可積分系分野の主要な国際会議であるSIDE13（隔年開催）を2018年11月に福岡で開催した。研究代表者(山田)と分担者(野海)が組織委員として運営に協力すると共に、本研究課題の補助金を、招待講演者への旅費等に活用した。また、山田と野海は招待講演をした。

[研究の位置付けとインパクト・今後の展望] 規模・講演内容ともに充実したものとなり参加者から高い評価を得た。この分野における日本の研究水準の高さを改めて示す機会になった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Chen Junchao, Feng Bao-Feng, Maruno Ken-ichi, Ohta Yasuhiro	4. 巻 141
2. 論文標題 The Derivative Yajima-Oikawa System: Bright, Dark Soliton and Breather Solutions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Studies in Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 145 ~ 185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1111/sapm.12216	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Noumi, Masatoshi	4. 巻 76
2. 論文標題 Remarks on σ -functions for the difference Painleve equations of type E ₈	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 1-65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yamada Yasuhiko	4. 巻 13
2. 論文標題 An Elliptic Garnier System from Interpolation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 069(8pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.3842/SIGMA.2017.069	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H.Nagao and Y.Yamada	4. 巻 51
2. 論文標題 Variations of q-Garnier system	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 135204(19pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1088/1751-8121/aaae31	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hidehito Nagao and Yasuhiko Yamada	4. 巻 61
2. 論文標題 Study of q-Garnier system by Pade method	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Funcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 109-133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1619/fesi.61.109	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 C.Ormerod, Y.Yamada	4. 巻 11
2. 論文標題 From polygons to ultra discrete Painleve equations	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 056(36pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.3842/SIGMA.2015.056	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 K.Kajiwara, M.Noumi, Y.Yamada	4. 巻 50
2. 論文標題 Geometric aspects of Painleve equations	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Phys. A	6. 最初と最後の頁 073001(164pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 F-B.Feng, J.Chen, Y.Chen, K-I.Maruno, Y.Ohta	4. 巻 11
2. 論文標題 Integrable discretizations and self-adaptive moving mesh method for a coupled short pulse equation	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Phys. A	6. 最初と最後の頁 043502(15pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) DOI: 10.1063/1.4916895	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Y. Yamada	4. 巻 B47
2. 論文標題 A Simple expression for discrete Painleve equations	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 087-095
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計29件 (うち招待講演 23件 / うち国際学会 14件)

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Nekrasov functions and q-difference equations
3. 学会等名 立教大学, RiikyoMathPhys2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 因子化されたラックス行列の対称性
3. 学会等名 RIMS共同研究「可積分系数理の深化と展開」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 超幾何と共形場再訪
3. 学会等名 神戸大学, 超幾何学校2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Comments on q-Garnier systems
3. 学会等名 Workshop "Asymptotic, Algebraic and Geometric Aspects of Integrable Systems", Sanya (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 On q-Garnier systems
3. 学会等名 SIDE-13 (Fukuoka Japan) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masatoshi Noumi
2. 発表標題 Elliptic hypergeometric integrals and associated determinant formulas
3. 学会等名 SIDE-13 (Fukuoka Japan) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 A geometric formulation of the q-Garnier system
3. 学会等名 Workshop "Geometry, Analysis and Mathematical Physics", Kyoto (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 q-Garnier system and its autonomous limit
3. 学会等名 Workshop "Elliptic Hypergeometric Functions in Combinatorics, Integrable Systems and Physics", ESI (Vienna, Austria) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Dual Lax pairs for discrete isomonodromy equations
3. 学会等名 Workshop "Progress in Quantum Field Theory and String Theory II", 大阪市立大 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 長尾秀人・山田泰彦
2. 発表標題 q-差分ガルニエ系について
3. 学会等名 日本数学会無限可積分系セッション一般講演
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 長尾秀人・山田泰彦
2. 発表標題 q-差分ガルニエ系からq差分パンルヴェ系への簡約について
3. 学会等名 日本数学会無限可積分系セッション一般講演
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Geometric formulation of discrete Painleve equations
3. 学会等名 Workshop "Geometric Correspondences of Gauge Theories", SISSA (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 パンルヴェ方程式の幾何と対称性
3. 学会等名 Workshop "Exceptional Groups as Symmetries of Nature '17", KEK (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Geometric aspects of discrete Painleve equations
3. 学会等名 Workshop "Exceptional and ubiquitous Painlev'e equations for Physics", LPT-ENS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 ゲージ理論とガルニエ系
3. 学会等名 研究会「弦・場・素粒子」, 東京大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Theory and applications of the elliptic Painleve equation
3. 学会等名 The international winter school "Partition Functions and Automorphic Forms", JINR (ロシア) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 q-ガルニエ系の種々のラックス形式について
3. 学会等名 RIMS研究集会「可積分系数理論の現状と展望」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yasuhiko Yamada
2. 発表標題 On q-Garnier systems
3. 学会等名 Workshop "Conformal Field Theory, Isomonodromic tau-functions and Painleve equations", 神戸大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yasuhiko Yamada
2. 発表標題 On the q-Garnier system
3. 学会等名 Workshop on Integrable Systems, Sydney (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Conserved curves for autonomous (ultra-)discrete Painleve equations
3. 学会等名 The 9th IMACS Conference, Waves 2015, 米国 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Geometric introduction to discrete Painleve equations
3. 学会等名 Needs 2015, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 モノドロミー保存変形と代数曲線
3. 学会等名 琉球大数学科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 q-Garnier系とその自励化
3. 学会等名 超幾何研究会2016, 神戸大学
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 q-ガルニ工系と超楕円QRT系
3. 学会等名 有理函数近似が繋ぐ可積分系・直交多項式・パンルヴェ方程式, 一橋大学
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 長尾秀人・山田泰彦
2. 発表標題 パデ法とq差分ガルニ工系
3. 学会等名 日本数学会無限可積分系セッション一般講演
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Geometry of Painleve equations
3. 学会等名 Integrable Systems in Newcastle, 英国 (招待講演)
4. 発表年 2014年

1. 発表者名 山田泰彦
2. 発表標題 モノドロミー保存変形の幾何学と量子化
3. 学会等名 大岡山談話会 (招待講演)
4. 発表年 2014年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 Quantum curves associated with quantum Painleve equations
3. 学会等名 Curves, Moduli and Integrable Systems, 津田塾大 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Y. Yamada
2. 発表標題 SW curve and its quantization
3. 学会等名 ミニワークショップ「数学・物理における可積分性の諸相」大阪市立大 (招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Home page of Yasuhiko YAMADA http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/yamaday/index.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	太田 泰広 (Ohta Yasuhiro) (10213745)	神戸大学・理学研究科・教授 (14501)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	野海 正俊 (Noumi Masatoshi) (80164672)	神戸大学・理学研究科・教授 (14501)	