様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６２８７０１９

研究課題名（和文）行列式過程とその一般化に関する研究

研究課題名（英文）Determinantal processes and their generalizations

研究代表者
白井　朋之（Shirai, Tomoyuki）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：７０３０２９３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　11,300,000円

研究成果の概要（和文）：行列式過程は数学・物理などの様々な場面にあらわれるある種の反発性をもつランダム現象を記述する重要な確率モデルの一つです．行列式過程とその一般化について考察し，理論的な面の研究とともに応用的な側面の研究も行いました．その一例として，従来はランダム行列のモデルとして主に物理で研究されていたギニブル点過程という行列式過程を用いてワイヤレスネットワークの基地局のモデル化を行い，信号対干渉比の確率の評価を行いました．

研究成果の概要（英文）：Determinantal point processes are one of the most important models of describing several phenomena that exhibit repulsion. We investigate theoretical aspects and also application aspects of determinantal point processes and their generalization. For example, we estimate the Signal-to-Interference-Ratio for the wireless network whose base stations are configurated by Ginibre point process, which is one of the most important determinantal point processes and has been used for the study of random matrices in physics.

研究分野：確率論

キーワード：行列式過程　ギニブル点過程　再生核ヒルベルト空間　パーム測度　ワイヤレスネットワーク　代数的力学系　SLE　Dysonモデル

1. 研究開始当初の背景

20 世紀初めに数理統計学者の Fisher, Wishart らにより導入されたランダム行列は, 1960 年代になって Wigner, Mehta, Dyson, Ginibre らに代表される数理物理学者らによりその固有値分布に対する重要な結果が得られて以来, 様々な研究がなされてきた. 特に 1990 年代後半から現在に至るまでの多分野(数理物理, 表現論, 確率論, 組合せ論, 可積分系理論)に渡る研究は著しく, 様々な重要な結果を生んだ. 90 年代の後半に申請者は高橋陽一郎との共同研究により A. Soshnikov と同時期に独立に, 物理的背景から Macchi によって導入されていた行列式点過程(フェルミオン点過程)の概念をきわめて一般の空間上に拡張し, その性質や種々の極限定理について詳しく調べて行列式点過程の基礎を確立した. 本研究課題で行列式過程の最も重要な例として念頭においているものは, ランダム行列 Gaussian Unitary Ensemble (GUE) と Ginibre Ensemble (GE) のランダム固有値であるが, 一方様々な対象に行列式構造が内在していることが, 多くの分野の研究で明らかになっていた.

２．研究の目的

ランダム行列の固有値, ランダムヤング図形, リーマンゼータ関数の零点などに内在する行列式的構造は行列式過程として抽象化されて詳しい研究がなされ, 同様の構造をもつ具体的な問題が統一的に扱えるようになった. 行列式構造など背景に潜む構造が明らかになった上での確率過程は, きわめて精緻な解析が可能になる. 本研究の目的は, 行列式過程をプロトタイプとする代数的・組合せ論構造に着目したランダム現象の研究である. 行列式過程の理論をさらに深化させるとともに, この枠組みに入らない種々の具体的な確率過程の解析を進めて, それらの一般的な枠組みの定式化も目標とし, その知見を個々の問題にフィードバックし, 新たな視点からの研究を目指す.

３．研究の方法

国内および国外の行列式過程とその周辺で研究している研究者に, 研究分担者・連携者・協力者として参画してもらい, 行列式過程とその一般化について組織的に研究を行った. 行列式過程とそれを特別な場合として含む確率過程の研究を行うことにより, 行列式過程のより広い枠組みにおける位置付けを認識し, 従来の行列式点過程の守備範囲を大いに広げることが可能になった. ランダム行列の固有値などの具体的対象から行列式過程への抽象化とその研究が, 確率論以外の数学の他分野にも影響を与えたのと同様に, 本研究の推進はランダム行列の新たな理解だけに留まらず, 今後広範な数学の研究において新たな視点と問題を提供することが大いに期待される.

４．研究成果

(1) ギニブル点過程と De Branges 空間とよばれる再生核ヒルベルト空間に付随する行列式点過程が剛性をもつこと, 異なる複数の点における Palm 測度が, 点の個数が等しいか否かで絶対連続か決まることを示した. また絶対連続の場合にラドンニコディム密度も具体的に計算した.

(2) α-ギニブル点過程に配置された基地局とする無線セルラーネットワークについて, 無線通信における主要な量である信号対雑音比(SIR)を考察した.信号減衰を表す経路損失関数が 原点で非有界な場合に, ある十分条件のもとで SIR の分布の裾確率の正確な漸近挙動を得た.

(3) ガウシアンβアンサンブルから定まるランダムヤコビ行列の平均スペクトル測度を計算した.

(4) ギニブル点過程の再生核ヒルベルト空間が定数磁場のシュレーディンガー作用素の最低次の固有空間であることに着目して，高次の固有空間に対応する行列式点過程を定義し，その性質について調べた．

(5) 極限でコンパクトな台をもつ確率測度に収束するような初期点配置から複数の SLE を走らせたとき極限にあらわれる解測度のスチルチェス変換のみたす複素 Burgers 方程式の初期配置が 1 点もしくは 2 点の場合に厳密解の表示をあたえ，1 点の場合は極限に Wigner の半円則に収束すること，またコンパクト台の初期配置に対して時間無限大で Wigner の半円則に収束することを示した．

(6) Dyson モデルにあらわれるドリフト項を Jacobi のテータ関数の対数微分で置きかえたモデルの時空間相関関数を計算し，行列式過程であることを示した．

(7) 行列式マルチンゲール表現を用いて．等間隔の初期条件をもつ無限非衝突ランダムウォークが行列式過程であることを示し，緩和過程についても考察した．

(8) 配置空間上の多項式のなす集合がランダム行列に関連する対数型のポテンシャルをもつ種々の無限粒子系に対するディリクレ形式のコアになることを示した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　10　件）
以下すべて査読有.

① Ikkei Hotta and Makoto Katori, Hydrodynamic Limit of Multiple SLE, Journal of Statstical Physics, 171(2018), 166-188.

② Alexander I. Bufetov and Tomoyuki Shirai, Quasi-symmetries and rigidity for determinantal point processes associated with de Branges spaces, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A Math. Sci. 93 (2017), 1-5.

③ Tomoyuki Shirai and Hirofumi Osada, Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process, Probability Theory Related Fields 165 (2016), 725-770.

④ Naoto Miyoshi and Tomoyuki Shirai, Spatial modeling and analysis of cellular networks using the Ginibre point processes: a tutorial, IEICE Transactions on Communications E99-B (2016), 2247-2255.

⑤ Tomoyuki Shirai and Evgeny Verbitskiy, Solvable and algebraic systems on infinite ladder, Indagationes Mathematicae 27 (2016) 1116-1183.

⑥ Makoto Katori, Elliptic Bessel processes and elliptic Dyson models realized as temporally inhomogeneous processes, Journal of Mathematical Physics 57 (2016), 103302/1-32.

⑦ Trinh Khanh Duy and Tomoyuki Shirai, The mean spectral measures of random Jacobi matrices related Gaussian beta ensembles,

Electoric Communications in Probability 20 (2015), 1-13.

⑧ Tomoyuki Shirai, Ginibre-type point processes and their asymptotic behavior, Journal of the Mathematical Society of Japan 67 (2015), 763-787.

⑨ Makoto Katori, Determinantal martingales and correlations of noncolliding random walks,Journal of Mathematical Physics 159 (2015), 21-42.

⑩ Hirofumi Osada and Hideki Tanemura, Cores of Dirichlet forms related to random matrix theory, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 150 (2014), 145-150.

〔学会発表〕（計　7　件）

① Tomoyuki Shirai, Determinantal point processes associated with de Branges spaces, Various Aspects of Multiple Zeta Functions Nagoya University, 2017/8/21-25.

② Tomoyuki Shirai, Determinantal point processes associated with extended kernels and spanning trees on series-parallel graphs, Function theory and dynamics of point processes, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia, 2017/6/1-3.

③ Tomoyuki Shirai, Determinantal point processes associated with reproducing kernel Hilbert spaces, Random Matrices and Determinantal Process, CIRM, Marseille, France, 2017/2/27-3/3.

④ Makoto Katori, Elliptic Bessel Processes and Elliptic Dyson Model Realized as Temporally Inhomogeneous Processes, 14th International Symposium, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2015/10/28.

⑤ Hideki Tanemura, Stochastic differential equations related to random matrix theory, 14th International Symposium, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2015/10/28.

⑥ Naoto Miyoshi, Downlink Coverage Probability in a Cellular Network with Ginibre Deployed Base Stations and Nakagami-m Fading Channels, WiOpt 2015 : The 13th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks, Indian Institute of Technology, Bombay, Mumbai, India, 2015/5/28.

⑦ Tomoyuki Shirai, Absolute Continuity and Singularity for the Ginibre Point Process and its Palm measures, UK-Japan Stochastic Analysis School, University of Warwick, 2014/9/2.

〔図書〕（計　1　件）

① Makoto Katori, Bessel Processes, Schramm-Loewner Evolution and the Dyson model, Springer 2016.

６．研究組織

(1)研究代表者

白井朋之（SHIRAI, Tomoyuki）

九州大学・マス・フォア・インダストリ
研究所・教授
研究者番号：70302932

(2)研究分担者
脇隼人（WAKI, Hayato）
九州大学・マス・フォア・インダストリ
研究所・准教授
研究者番号：00567597

種村秀紀（TANEMURA, Hideki）
千葉大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：40217162

香取眞理（KATORI, Makoto）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：60202016

(3)連携研究者
三好直人（MIYOSHI, Naoto）
東京工業大学・情報理工学院・教授
研究者番号：20263121

(4)研究協力者
長田博文（OSADA, Hirofumi）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20177207