様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２５ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６３３０００２

研究課題名（和文）線形計画問題の大域的構造に基づくピボットアルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Development of pivoting algorithms based on global structure of linear programming

研究代表者
森山　園子（MORIYAMA, Sonoko）

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：２０３６１５３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：線形計画問題（LP）の解法の１つに，1947年にDantzigにより提案された単体法を始祖とするピボットアルゴリズムがある。ピボットアルゴリズムとは，制約条件で記述された多面体の頂点を，目的関数値を改善する方向にたどり最適解を見つける手法である。多項式時間を達成するピボットアルゴリズムの存在の解明はLPにおける重要な未解決問題として知られる。本研究では，従来のピボットアルゴリズムの多くがLPに内在する多面体構造という大域的性質を考慮していないことに着目し，この未解決問題に挑む。

研究成果の概要（英文）：Pivoting algorithms is known as a method in linear programming (LP), and it has been actively studied starting at the simplex method, proposed by Dantzig in 1947. A pivoting algorithm aims to proceed in the direction increasing the value of an objective function, and find the optimal solution. It is one of important unsolved problems of LPs to develop an pivoting algorithm in polynomial time. In this investigation, based on the fact that existing algorithms do not take global properties on polyhedral structure of LPs into account, we challenge the outstanding problem by utilizing global structure of LPs

研究分野：数理計画，組合せ幾何学

キーワード：線形計画　多面体　マトロイド

１．研究開始当初の背景

線形計画問題（LP）とは，1 次等式および不等式で記述された制約条件の元で，目的関数である線形関数を最適にする解をみつける問題である。同問題は，1984 年の Karmarkar 法を契機として発展した内点法により理論的に多項式時間で解けることが知られる。しかし，内点法は数値的解法であるため，安定性や誤差といった問題を内包している。そのため，数値的解法の対極にある組合せ的解法として，1947 年に Dantzig により提案された単体法に始まる一連のピボットアルゴリズムに対する期待は今なお大きく，現在も多項式時間ピボットアルゴリズムの構築を目指して様々なアプローチが試みられているが，未だ多項式時間を保証するピボットアルゴリズムは見つかっていない。また，内点法は多項式時間を達成するが弱多項式時間であり，線形計画問題を強多項式時間で解く手法が存在するか否かも未解決な状況にある。

２．研究の目的

線形計画問題のピボットアルゴリズムは，制約条件が記述する多面体の頂点に最適解が現れるという性質に基づき，目的関数値を改善する方向に多面体の頂点をたどって最適解を見つける手法である。従来のピボットアルゴリズムでは，次に進む頂点の選択の際に使用する情報は元の頂点に隣接する局所構造のみで，LP に内在する多面体構造という大域的構造を考慮していなかった。制約条件が記述する多面体上にピボットアルゴリズムの振る舞いを記述した有向グラフを「LP グラフ」という。Gärtner は LP グラフが満たす性質である Holt-Klee 性 [Holt, Klee (1998)] に基づくピボットアルゴリズムを開発し，Matousek クラスと呼ばれる LP の部分クラスで同アルゴリズムの反復回数が多項式 $O(n^2)$に収まることを 2002 年に示した（n：LP 内変数の数)。この Gärtner のピボットアルゴリズムは，LP の部分クラスではあるものの，一般の n 変数の LP で多項式回の反復回数を初めて達成したアルゴリズムであり，多項式時間ピボットアルゴリズムの構築に向けての重要な一歩として研究者の間で高い評価を得ている。研究代表者は，Gärtner のピボットアルゴリズム提案の鍵となった LP の大域的構造としての LP グラフの重要性に早くから着目し，LP グラフが満たす性質の研究に従事してきた。これらの研究を進めるうえで，LP グラフ上での網羅的な解析が重要となる。しかし，特徴付けが無い LP グラフの列挙は難しいため，列挙が比較的容易でありかつ LP グラフを真に含む非巡回唯一シンクグラフ（AUSO）上で解析が行われてきた。AUSO 集合は LP グラフ集合より十分大きいことが知られる。従って，LP グラフの性質を精査するためには，LP グラフ上で解析が行われるべきである。そこで，本研究では，以下 3 つの方針に沿って，線形計画問題の未解決問題に挑んだ。

(1)　マトロイドを通じた LP グラフ列挙
(2)　LP の大域的性質の解明
(3)　大域的性質に基づく ピボットアルゴリズムの開発

単体法の提案以降，多くのピボットアルゴリズムが提案されては，その多項式時間性が否定されてきた。ピボットで次に進む頂点を選択する際に，従来のピボットアルゴリズムでは元の頂点に隣接する局所構造のみを考慮していたが，本研究では LP の大域的構造を反映したピボットアルゴリズム構築を目指す点が独創的な着眼点である。多項式時間ピボットアルゴリズムの開発における LP の大域的構造の重要性は[Gärtner(2002)]を通じて研究者の間で認知されていたが，LP グラフの性質に関する研究が進まなかったことから，大域的構造に基づくピボットアルゴリズムの研究も停滞していた。しかし，研究代表者が 2009 年に提案したシェリング性に始まる LP グラフの性質に関する研究に十数年振りの進展があったことで，LP の大域的構造に基づくピボットアルゴリズムによる多項式時間達成に近年再び注目が集まっている。大域的構造に着目した本研究はタイムリーなものであり，多項式時間ピボットアルゴリズムの存在を問う LP の未解決問題の解明の重要な一歩となると確信している。

３．研究の方法

上述した 3 つの目標を通じて，以下の体制で研究を遂行した。

(1) マトロイドを通じた LP グラフ列挙

LP グラフの列挙は，台グラフとなる多面体の離散構造を表す有向マトロイドの列挙と，これらの有向マトロイド集合の幾何的実現可能性の判定法構築の 2 つに分かれる。研究代表者は，実現可能性が理論的に自明ではない最小ランク・要素数の有向マトロイド集合を全て分類した経験を持つ。更に，有向マトロイドの離散構造であるマトロイドの表現可能性についても様々な成果を出してきた。研究代表者が積み上げて来たマトロイドにおける研究成果を駆使しつつ，研究協力者（福田公明教授，定兼邦彦教授）と共に研究を遂行した

(2) LP の大域的性質の解明

LP の大域的構造として重要な役割を果たす LP グラフの性質を探求した。研究代表者は，LP グラフの重要性に早くから着目し，LP グラフが満たす性質の研究に従事してきた。多面体的複体の組合せ分割に関する研究実績を土台として 2009 年に提案した「シェリング性」は研究者の間で高い評価を得ている。しかし，既存の 3 つの性質（非巡回性，唯一シンク性，Holt-Klee 性）とシェリング性の 4 つの性質でも LP グラフは一般に特徴付けら

れない。そこで，(1) で得られた LP グラフ集合を解析し，LP グラフが満たす新たな性質の提案を目指すとともに，既存の 4 つの性質の解明を目指した。本研究は研究協力者（Bernd Gärtner 教授）と共同で進める。

(3) 大域的性質に基づく
ピボットアルゴリズムの開発

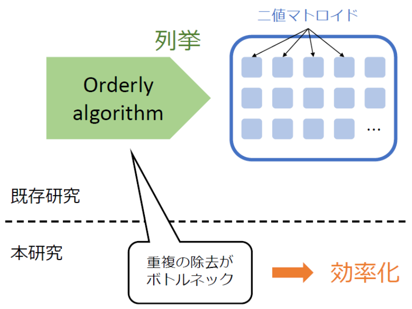
研究代表者が提案したシェリング性を含む既存の 4 つの性質，および(2)で提案予定の LP グラフの性質に基づく多項式時間ピボットアルゴリズムの開発を目指した。本研究も研究協力者（Bernd Gärtner 教授）と共同で進める。Gärtner 教授は，LP グラフの性質である Holt-Klee 性に基づき，一般の n 変数の LP で多項式回の反復回数を始めて達成したアルゴリズムを開発した経験を持つ。Holt-Klee 性という LP の大域的構造をピボットアルゴリズムに導入する際の知見を同教授から得つつ，多項式時間ピボットアルゴリズムの開発を目指した。

４．研究成果

(1) マトロイドを通じた LP グラフ列挙

(1-1) 二値マトロイドの列挙
（学会発表：①，②）

LP グラフを列挙するためには，上述した通り有向マトロイドの列挙が必要となるが，有向マトロイドの総数はランク 4・要素数 8 に限っても 18 万を超えるほど数が膨大であるため，それ以上のランク・要素数における全列挙は難しい。一方で，マトロイドは複数の有向マトロイドをまとめて記述するので，ランク 4 では要素数 10 まで全列挙が可能である。しかし，ランク 4・要素数 10 ではマトロイドでも 48 億個を超えており，これ以上の全列挙は望めない。



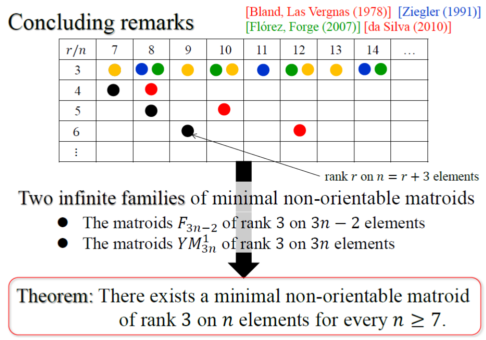
そこで，本研究では，マトロイドの部分集合である二値マトロイドに焦点を絞って全列挙を行った。まず，従来のマトロイド列挙アルゴリズムの問題点を解決し，二値マトロイド列挙に即したアルゴリズムを開発した。従来の列挙アルゴリズムでは，組合せ同値となるマトロイドの重複を回避しつつマトロイドの公理に基づいて列挙していた。一方で，二値マトロイドの場合は，マトロイドの公理以上に，は 0,1 のみからなる行列で表現できる必要がある。そこで，二値行列を直接列挙しつつ，離散構造として同値な行列を排除する列挙アルゴリズムを構築した。このアルゴリズムで列挙した結果は以下の表の通りである（r：ランク，n：要素数）。従来の列挙結果（黒字）に加え，大きなランクと要素数における列挙（赤字）が実現できた。二値マトロイドの列挙結果としては，現時点でこれを超える研究はない。

この列挙結果は 0,1 からなる行列列挙に対応するものであるが，このマトロイドの向きづけ可能性を判定することで，LP グラフ集合が得られる。本研究では LP グラフ集合を得るまでには至らなかったが，この列挙結果を元に引き続き研究を続けていく。

$n \setminus r$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	2	1	0	0	0	0
5	0	0	1	3	1	0	0	0
6	0	0	1	4	4	1	0	0
7	0	0	1	5	8	5	1	0
8	0	0	0	6	15	14	6	1
9	0	0	0	5	29	38	22	7
10	0	0	0	4	46	105	80	32
11	0	0	0	3	64	273	312	151
12	0	0	0	2	89	700	1285	821
13	0	0	0	1	112	1794	5632	5098
14	0	0	0	1	128	4579	26792	37191
15	0	0	0	1	144	11635	137493	320663
16	0	0	0	0	145	29091	745413	3186083

(1-2) マトロイドの向き付け可能性
および表現可能性
（雑誌論文：①，③，④，⑤，
学会発表：④，⑤，⑥，⑦）

マトロイドの性質を判定するうえで，その性質を満たす場合はある構造を含まないことを理論的に示す「除外（excluded）マイナー」という考え方がある。グラフ理論における近年のマイナー理論の発展を受け，研究代表者はグラフの離散構造を表すマトロイドにおける除外マイナーに着目し，その性質解明に従事してきた。



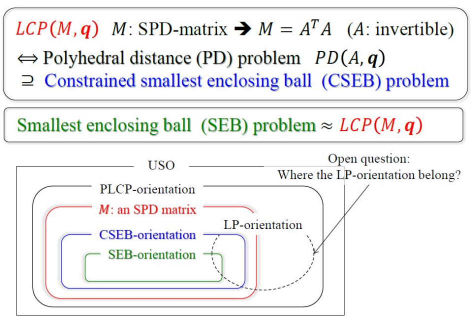
本研究では，マトロイドの向き付け可能性と表現可能性（無限体）に関する除外マイナーを精査した。両性質共にランクを限定しない場合に除外マイナーの個数が無限個にな

ることは知られていたが，特定のランクにおける除外マイナーの個数の無限性については知られていなかった。そこで，ランクを 3 に限定し，7 以上の全ての要素数のマトロイドに向き付け可能性の除外マイナーが存在することを示し，除外マイナーの個数が無限個であることを示した。また，向きづけ可能性と表現可能性の和集合と積集合における除外マイナーの個数も，ランクを 3 に制限しても無限個になることを示した。結果的に，本研究で対象とした性質は除外マイナーでの性質判定が難しいと判明したが，本研究での経験を生かして，今後も除外マイナーの個数が有限個となる性質の解明を続けたい。

(2) LP の大域的性質の解明
(3) 大域的性質に基づく ピボットアルゴリズムの開発

（学会発表：③）

LP の大域的性質として研究代表者が着目してきた Holt-Klee 性について，LP の拡張である線形相補性問題（LCP）との関係を精査した。線形相補性問題は LP が満たす相補性の拡張により得られる数理計画問題であり，問題の難しさは問題を定義する行列 M の性質に依存する。特に，M が P 行列のときは，LP グラフと同様に，ピボットアルゴリズムの遷移過程を PLCP グラフとして記述でき，任意の LP グラフ（台グラフは超立方体）は PLCP グラフであることが知られる。本研究では，M が半正定値(SPD)行列であるときに着目し，以下の結果を得た。まず，M が半正定値行列である LCP は幾何の古典的な問題である多面体距離問題(PD)と等価であることを示した。更に，この多面体距離問題がある条件を満たすとき，最小包含球問題の一種（CSEB）と等価であることを示した。最小包含球問題（SEB）とは，d 次元空間に配置された n=d+1 点の点集合を全て包含する最小半径の球を求める問題であるが，CSEB は n 点のうち 1 点を原点にするという制約を与えている。SEB 問題を解く過程は LP グラフや PLCP グラフと同様に有向グラフに表すことができ，SEB グラフと呼ばれる。本研究では，任意の SEB グラフが PLCP グラフであることを示し，P 行列上の線形相補性問題と SEB 問題との間の包含関係を初めて解明した。同時に，PLCP グラフにおける Holt-Klee 性の成立から SEB グラフにおける Holt-Klee 性の成立も示され，LP を含む数理計画問題全般における Holt-Klee 性の重要性が明らかになった。



本研究では Holt-Klee 性を活かしたピボットアルゴリズムの解明，および新たな LP グラフの性質の提案には至らなかったが，LP を超えて Holt-Klee 性の重要性は明らかにすることができた。

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Hidefumi Hiraishi and <u>Sonoko Moriyama</u>, Excluded Minors of Rank 3 for Orientability and Representability, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences，査読有，accepted (Feb. 26, 2018)，2018 年.

② Akitoshi Kawamura, <u>Sonoko Moriyama</u>, Yota Otachi, and Janos Pach, A Lower Bound on Opaque Sets, Proc. of the 32nd Symposium on Computational Geometry, 査読有，vol.32, 46:1-46:10, 2016 年. DOI: 10.4230/LIPIcs.SoCG.2016.46

③ Hidefumi Hiraishi and <u>Sonoko Moriyama</u>, Minimal non-orientable matroids of rank three, European Journal of Combinatorics，査読有，vol. 50, pp. 123-137, 2015 年.

④ Hidefumi Hiraishi and <u>Sonoko Moriyama</u>, Orientable or Representable Matroids over Infinite Fields of Rank 3, Proc. of the 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics on Its Applications，査読有，vol. 9, pp.207-211, 2015 年.

⑤ Hidefumi Hiraishi and <u>Sonoko Moriyama</u>, Excluded Minors for Q-Representable Matroids in Algebraic Extension, Proc. of the 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs，査読有，vol. 18, pp.58-59, 2015 年.

〔学会発表〕（計７件）

① 杉森健，定兼邦彦，<u>森山園子</u>，不変量を用いた二値マトロイドの効率的列挙，Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA2017)，ミニシンポジウム ：マトロイド表現可能性（招待講演)，熊本大学，熊本，2018 年.

② Ken Sugimori, <u>Sonoko Moriyama</u> and Kunihiko Sadakane, Enumeration of binary matroids using degree sequences, The 20th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry,Graphs, and Games（招待講演），東京理科大学，2018 年.

③ Bernd Gaertner, Hiroshi Imai, Hiroyuki Miyazawa, <u>Sonoko Moriyama</u> and Jiro

Nishitoba, Geometric Optimization Related with an LCP with SPD-matrices, The Fifth International Conference on Continuous Optimization of the Mathematical Optimization Society（招待講演）, 政策研究大学, 2016 年.

④ Sonoko Moriyama and Hidefumi Hiraishi, Excluded Minors for Matroids of Rank Three, SIAM on Conference on Discrete Mathematics（招待講演）, Atlanta, U.S.A., 2016 年.

⑤ Sonoko Moriyama and Hidefumi Hiraishi, Q[x]-representable Excluded Minors for Q-Representable Matroids of Rank Three, 2016 International Workshop on Structure in Graphs and Matroids（招待講演）, Eindhoven, The Netherlands, 2016 年.

⑥ Sonoko Moriyama, Minimal non-orientable matroids of rank three, 2014 International Workshop on Structure in Graphs and Structures（招待講演）, Princeton University, U.S.A., 2014 年.

⑦ Hidefumi Hiraishi and Sonoko Moriyama, Orientable or Representable Matroids over Infinite Fields of Rank 3, The 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics on Its Applications, Nishijin Plaza, 福岡, 2014 年.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者

森山　園子（MORIYAMA, Sonoko）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：２０３６１５３７

(2)研究分担者
（　　　）
研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）
研究者番号：

(4)研究協力者
福田　公明（FUKUDA, Komei）
定兼　邦彦（SADAKANE, Kunihiko）
Bernd Gaertner
David Bremner