

平成 29 年 5 月 17 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26330008

研究課題名(和文) 仕事関数の解析的取扱いによるページ移動予想の解決

研究課題名(英文) Settling Page Migration Conjecture by Analytical Estimation of Work Functions

研究代表者

松林 昭 (MATSUBAYASHI, Akira)

金沢大学・電子情報学系・准教授

研究者番号：10282378

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：オンラインアルゴリズムの分野においてよく知られるページ移動問題について研究し、次の通り成果を得た。まず、この問題に対する最良のオンラインアルゴリズムに関する従来の予想を否定する事実を数学的に証明した。次に、ユークリッド空間とリングネットワーク上のオンラインアルゴリズムを設計した。これらのアルゴリズムはいずれも、ページサイズが最小であるという限られた条件の下ではあるが、長年改善が可能かどうか明らかでなかった既存の結果を上回る性能を持つことを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We studied the page migration problem, which is well known in the area of online algorithms, and obtained the following results. First, we mathematically disproved a previous conjecture about an optimal online algorithm for this problem. Then, we designed online algorithms on the Euclidean space and ring networks. We proved that, under the condition that the page size is minimum, both of these algorithms have performance better than previous results that has not been improved for many years.

研究分野：離散構造とアルゴリズム

キーワード：オンラインアルゴリズム ページ移動問題 仕事関数 競合比

1. 研究開始当初の背景

処理すべきデータが1つずつ順々に到着する状況で、データが1つ到着するたびに計算を行なって結果を出力するような計算手順を「オンラインアルゴリズム」と呼ぶ。オンラインアルゴリズムの分野においてよく知られる問題に「ページ移動問題」と呼ばれる問題がある。この問題はネットワークのノードに保持されるページと呼ばれるデータに対するアクセス要求が順々に発生する状況で、ネットワークの負荷を最小化するようにページの保持ノードを計算する問題である。ネットワークの負荷は、アクセス要求に対するコスト(ページと要求ノードとの距離)とページの移動に要するコスト(移動距離×ページサイズD)の総和で定義される。この問題はオンラインアルゴリズムの分野で初期の頃から研究されており、基本的な問題の一つとして認識されているが、今なお最適な性能を持つオンラインアルゴリズムは非常に限られた条件の下でしか知られていない。オンラインアルゴリズムの性能は競合比と呼ばれる、最適オフラインアルゴリズムとのコスト比の最悪値で評価され、ページ移動問題においては1に近いほど良い性能を持つアルゴリズムといえる。

ページ移動問題に対しては、初めてこの問題に対して競合解析を行ない、木や一様ネットワークで3-競合アルゴリズムを提案したBlackとSleatorによる1989年の論文[1]で「あらゆるネットワークで3-競合アルゴリズムが存在する」ことが予想された。この予想は後に否定されたが[2]、それは $D=1$ の場合に限定されており、大きい D に対する予想の正否については不明であった。最近研究代表者によって、3ノードネットワークにおいて $(3+1/D)$ -競合アルゴリズムが提案され、3ノードの場合にはこの予想が漸近的に(すなわち、 D が大きくなれば3に収束するという意味で)成立することが示された。それとともに、3ノードネットワークにおける競合比の下界(最良のアルゴリズムの性能の下限)は $3 + (1/D)$ であることも示された。このことは、3ノードという限定された条件の下でさえも、厳密に3-競合のアルゴリズムは存在しないことを意味する。このように3ノードの場合には詳細な事実が判明しているが、ノード数の多い一般的なネットワークにおいては、ページサイズに関して漸近的な3-競合アルゴリズムが存在するか否かは依然として不明であった。

2. 研究の目的

本研究では「任意のネットワークにおいて漸近的な3-競合アルゴリズムが存在する」という予想(ページ移動予想)が成立するか否か、もし成立しないのであれば、どのような条件下で成立するのかを明らかにすることを旨とした。より具体的には以下の通りである。

(1) ページサイズDに関して厳密に、または漸近的に3-競合ページ移動アルゴリズムが存在することが判明しているのは3ノード以下のネットワーク、木ネットワーク、一様ネットワーク、およびこれらのネットワークの直積の場合のみであった。そこで、4~6程度の少ノード数の場合で最良のアルゴリズムの競合比を明らかにする。

(2) オンラインアルゴリズムを設計する道具の一つに「仕事関数」がある。仕事関数とは、ある時点までに到着した入力データを全て処理した上で、アルゴリズムが選択し得る各状況に至るまでの最適オフラインアルゴリズムのコストである。3ノードネットワーク上の漸近的な3-競合アルゴリズムはこの手法を用いて設計された。特に競合比の解析には、ネットワークを連続閉曲線に拡張した上で、仕事関数の片側微分係数を利用するというテクニックが用いられていた。本研究ではこのテクニックをより一般的なネットワークにも適用することを目指し、準備研究として、典型的な連続空間であるユークリッド空間について検討し、既存の最良の性能を上回るアルゴリズムを設計する。

(3) (2)の結果を踏まえ、ノード数の多いネットワークにおいて最良のアルゴリズムの競合比を明らかにする。もしくは、既存の最良の性能を上回るアルゴリズムを設計する。

3. 研究の方法

(1) まず目的(1)のため、探索用計算機を用いて、少ノード数でオンラインアルゴリズムとアドバーサリー(オンラインアルゴリズムと最適オフラインアルゴリズムのコスト比が最大になるような入力データ列を生成するアルゴリズム)のゲーム木を探索する計算機実験を行った。この実験により、競合比の下界を得ることができ、少ノード数でページ移動予想が成立するか否かの兆候を捉えることができる。この実験の結果からページ移動予想の成立・不成立を予想し、数学的な証明を試みた。

(2) 次に目的(2)のため、2次元ユークリッド空間上でのページ移動問題の仕事関数がどのように変化し、閉じた式として表現できるか観察した。また、この結果に基づき、ユークリッド空間上でのアルゴリズムの設計を試みた。

(3) 最後に目的(3)のため、ネットワークの各辺を線分で置き換えることによって連続空間を定義し、この空間の上で仕事関数を解析的に取り扱い、アルゴリズムを設計・解析することを試みた。

4. 研究成果

(1) 目的(1)に対して、少ノード数、特に 4 ノードの場合について、任意のオンラインアルゴリズムとアドバーサリーのゲーム木を探索する計算機実験を行なった。この実験により、限られた D における競合比の下界を得ることができる。実験の結果としては D が大きくなるにつれて競合比の下界は減少する傾向が得られた。このことはページ移動予想が成立する兆候といえるが、一方で減少量は想定していたよりも小さく、この結果だけから漸近的な 3-競合アルゴリズムが存在する・しないという予想を行うことは困難であった。並行してページ移動予想を直接解決することを試みた。競合比の下界の証明には任意のオンラインアルゴリズムに対するアドバーサリーを設計し、オンラインアルゴリズムと最適オフラインアルゴリズムのコスト比が常にある値以上になることを示す必要がある。本研究では非常に複雑なアドバーサリーを設計し、任意のオンラインアルゴリズムと最適オフラインアルゴリズムのコスト比を詳細に見積もることで、「特定の 4 ノードリングネットワークに対して、漸近的な 3-競合アルゴリズムは存在しない」ことを数学的に証明することに成功した。この結果は、ページ移動予想が成立しないことを意味する。さらには、4 ノードリングネットワークという極めて単純なネットワークでさえも漸近的な 3-競合アルゴリズムが存在しないことを意味する。これらの事実は、より一般的なネットワークにおけるページ移動問題のオンラインアルゴリズムが「最良の性能を持つか否か」を評価する上で欠かすことのできない極めて重要な知見をもたらす。

(2) 目的(2)に対して、2次元ユークリッド空間上でページ移動問題に対する仕事関数を観察した。仕事関数そのものは漸化式として定義されるが、関数の性質を明らかにするには閉じた式を求める必要がある。単純な条件下で閉じた式を求めることを試みたが、 $D=1$ の場合でさえも非常に多くの関数が複雑に貼り合わさった構造をしていることが判明した。そのため、数学的に競合比を保証できるようなアルゴリズムを、仕事関数を利用することによって設計することは困難であるように思われた。ただし、実験的なアルゴリズムの設計と解析を行い、既存の最良の性能を上回る見込みがあるという知見を得た。この方向についてのさらなる研究は今後の課題である。

一方、ユークリッド空間上で仕事関数を利用しないアルゴリズムについても検討した。任意の次元のユークリッド空間上で、直近のページ位置の履歴とアクセス要求位置から次のページ位置を決定する非常に単純なアルゴリズムを設計し、 $D=1$ に限定した場合であるが、このアルゴリズムが 2.75-競合であることを数学的に証明することに成功した。これは、同条件での既存の最良のアルゴリズ

ムの性能を上回るものである。

(3) 目的(3)に対して、ノード数の多いネットワークの一つとしてリングネットワークを対象とし、アルゴリズムの設計に取り組んだ。ネットワークを連続閉曲線で一般化し、その上で仕事関数を詳細に観察した。アルゴリズムの設計・解析に有用と思われる性質を見出し、その性質を利用して既存の最良の性能を上回るアルゴリズムを設計できる見込みはあったが、数学的な証明を完成させるまでには至らなかった。この証明の完成ならびにより一般的なネットワークへの拡張は今後の課題である。

一方、リングネットワーク上で仕事関数を利用しないアルゴリズムについても検討した。競合比の解析によく用いられるテクニックの一つにポテンシャル関数を使うものがある。ポテンシャル関数とは、大まかには、オンラインアルゴリズムと最適オフラインアルゴリズムのコストの時間的なずれを調整するために導入される関数である。通常の解析においては、ずれの大きさは一意的に決定される。本研究では任意のノード数のリングネットワーク上で、条件に応じてずれの大きさを変化させるといったテクニックを導入することによってアルゴリズムを設計した。その結果、 $D=1$ に限定した場合であるが、このアルゴリズムが 3.33-競合を持つことを数学的に証明することに成功した。これは、同条件での既存の最良のアルゴリズムの性能を上回るものである。

<引用文献>

[1] D. L. Black, D. D. Sleator, Competitive Algorithms for Replication and Migration Problems, CMU-CS-89-201, Department of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1989.

[2] M. Chrobak, L. L. Larmore, N. Reingold, J. Westbrook, Page Migration Algorithms Using Work Functions, J. Algorithms, vol. 24, no. 1, pp.124-157, 1997.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

(1) Amanj Khorramian, Akira Matsubayashi, Uniform Page Migration Problem in Euclidean Space, Algorithms, vol. 9, no. 3, 57:1-7, 2016. 査読有.
DOI:10.3390/a9030057

〔学会発表〕(計 5 件)

(1) Akira Matsubayashi,

Non-greedy Online Steiner Trees on Outerplanar Graphs,
Proceedings of the 14th Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA 2016), Lecture Notes in Computer Science, vol. 10138, pp. 129-141, 2017.
Presented on August 25, 2016, Aarhus(Denmark).
査読有

(2) Akira Matsubayashi,
A $3+O(\epsilon)$ Lower Bound for Page Migration, Proceedings of the 3rd International Symposium on Computing and Networking (CANDAR 2015), pp. 314-320, 2015.
Presented in the 7th International Workshop on Parallel and Distributed Algorithms and Applications, December 9, 2015, Sapporo Business Innovation Center (Sapporo, Hokkaido).
査読有

(3) Akira Matsubayashi,
Better Online Steiner Trees on Outerplanar Graphs,
情報処理学会研究報告, vol. 2015-AL-155, no. 2, November 20. 2015, 指宿市民会館(鹿児島県指宿市).

(4) Akira Matsubayashi,
A $3+O(\epsilon)$ Lower Bound for Page Migration,
電子情報通信学会技術研究報告, vol. 115, no. 84, (COMP2015-7), pp. 29-36, June 12, 2015, 定山溪ビューホテル(北海道札幌市).

(5) Akira Matsubayashi,
Online Steiner Trees on Outerplanar Graphs,
情報処理学会研究報告, vol. 2014-AL-150, no. 8, November 20. 2014, 大瀆信泉記念館(沖縄県石垣市).

〔その他〕

ホームページ等

<http://carrera.ec.t.kanazawa-u.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松林 昭 (MATSUBAYASHI, Akira)

金沢大学・電子情報学系・准教授

研究者番号：10282378