

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26330011

研究課題名(和文) 制約充足問題に対する効率の良い厳密および近似アルゴリズムの研究

研究課題名(英文) Studies on efficient exact and approximation algorithms for constraint satisfaction problems

研究代表者

玉置 卓 (Tamaki, Suguru)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：40432413

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：制約充足問題は様々な分野に現れる普遍的な組合せ問題である。制約充足問題は、その記述能力の高さゆえに、NP困難と呼ばれる計算困難なクラスに属している。本課題では、制約充足問題に対する効率の良い厳密および近似アルゴリズムの設計とその解析を行った。結果として、有限体上の多変数連立代数方程式系、最大充足可能性問題、重み付対称素子を持つ限定段数回路の充足可能性問題、一般回路の充足可能性問題に対する改良された厳密アルゴリズムを得た。また、時相制約充足問題に対する頑健な近似アルゴリズムも与えた。

研究成果の概要(英文)：Constraint satisfaction problems (CSPs) are fundamental combinatorial problems arising in various areas. CSPs belong to the class of NP-hard problems due to their high expressive power. In this study, we gave design and analysis of efficient exact/approximation algorithms. As a result, we obtained improved exact algorithms for systems of multi-variate polynomial equations over finite fields, the maximum satisfiability problem, the circuit satisfiability problem of bounded depth circuits with weighted symmetric gates and that of general circuits. We also obtained robust approximation algorithms for temporal CSPs.

研究分野：計算理論

キーワード：厳密アルゴリズム 近似アルゴリズム 計算困難 制約充足問題 充足可能性問題

1. 研究開始当初の背景

制約充足問題とは以下のような組合せ問題である。

入力: 有限種類の値を取る変数の集合と、それらの変数の間の制約の集合

出力: 全ての制約を満たすように変数に値を割り当てることができるか (Yes/No)

社会システムや産業活動などに関連して現れる生産計画、配置計画、自動設計などを始めとする重要な問題の多くは、制約充足問題として自然に定式化可能である。制約充足問題は、その記述能力の高さゆえに、NP 困難と呼ばれる計算困難なクラスに属している。

計算困難な問題に対しては、アルゴリズムに対する 3 つの要求 (a)どんな入力に対しても、(b)高速に処理し、(c)正しい結果を返す、をすべて同時に満たすことは不可能である。そこで、条件(a)を緩和した特殊な問題にのみ動くアルゴリズム、(b)を緩和した計算時間が長くてもよい厳密アルゴリズム、および(c)を緩和した解の質が悪くてもよい近似アルゴリズムの研究が盛んに行われている。

2. 研究の目的

本課題では、制約充足問題に対する効率の良い厳密および近似アルゴリズムの設計とその解析を目的とする。以下の 2 種類の目標を設定する。

・一定の成果が見込める目標

- (1) 制約充足問題の個々のクラスに対する効率の良いアルゴリズムの設計・解析
- (2) 設計したアルゴリズムの実用問題への適用、計算機実験評価

・挑戦的な目標

- (3) 制約充足問題の広範なクラスに適用可能なアルゴリズム設計・解析の手法開発
- (4) 制約充足問題に対するアルゴリズムの効率の限界証明

制約充足問題は、入力として与えられる制約の種類によって、様々なクラスに分類される。個々のクラスに対するアルゴリズムの開発を行うことで得られた知見を生かし、広範なクラスに対する汎用的なアルゴリズムを開発することが最終的な目標である。また、開発したアルゴリズムの実装評価および理論的な効率の限界証明も行う。

3. 研究の方法

本研究は理論研究であり、個人での研究や外部の研究者との共同研究により計画を進める。理論解析に必要な知見を得るために、計算機実験を適宜行う。具体的な研究テーマの候補として、重要な未解決問題や現状の解析の困難点の調査を済ませており、各年度に

おいてそれぞれのテーマに取り組む。得られた研究成果は、国内外で開催される会議、学術誌、専門書やウェブページ等を利用して積極的に公表する。

4. 研究成果

- (1) 素子除去: 回路サイズ下界と充足解計数上界

[雑誌論文]

本研究では素子除去と呼ばれる方法に基づき論理回路に対する最悪時/平均時計算困難性証明および充足可能性判定アルゴリズムを統一的に与える枠組みを構築した。

素子除去とは論理回路の入力を制限した際に冗長となる素子を取り除くことをいう。例えば変数の値を固定したり変数間に線形制約を課したりすることで冗長な素子が生じる。素子除去は計算困難性証明や充足可能性判定でよく用いられる手法であるがその適用や解析は扱う問題に応じて調節が必要である。

本研究では素子除去の効率さえ証明できれば計算困難性証明や充足可能性判定の効率が自動的に従うことを示せた。その帰結として既存より大きい素子数の下界証明と高速な充足可能性判定アルゴリズムを得た。

- (2) 最大充足可能性問題のやや疎な例題に対する改良された厳密アルゴリズム

[雑誌論文]

本研究では最大充足可能性問題に対する改良された指数時間厳密アルゴリズムを提案した。計算時間は n 変数 cn 節の場合に $2^{\{(1-f(c))n\}}$ 程度になる。

先行研究では決定性指数領域で $f(c)=1/0(c \log c)$ 、乱択多項式領域で $f(c)=1/0(c \log^3 c)$ 、決定性多項式領域で $f(c)=1/0(c^2 \log^2 c)$ が達成されていた。

本研究では決定性多項式領域で $f(c)=1/0(c \log c)$ 、決定性指数領域で $f(c)=1/0(c \log c)^{\{2/3\}}$ を達成した。また証明において幅削減の効率の再帰的な解析を与えた。

- (3) ユニタリ作用素識別の量子質問複雑性

[学会発表]

ユニタリ作用素識別は量子情報理論における基本的な問題である。ユニタリ作用素 U を実現するブラックボックス 0 が与えられたとする。ただし U はユニタリ作用素 U_1, U_2 のいずれかであると約束されている。このとき 0 に何回質問することで $U=U_1$ か $U=U_2$ を決定できるか知りたい。

本研究では質問回数の上下界を U_1, U_2 の「近さ」に関するパラメータで特徴付けた。得られた上下界は定数倍を除いて厳密である。

- (4) 有限体上の多変数連立代数方程式系に対する総当り探索の打破

[学会発表]

有限体上の多変数連立代数方程式系を解くことは、数学、科学、および工学における基本的な問題である。有限体の位数を q 、変数の個数を n とする。このとき、 q^n 通りの解候補を総当たり探索することにより問題を解くことができる。

本研究では、最悪時に q^n より速い計算時間でこの問題を解く初めてのアルゴリズムを示す。我々のアルゴリズムは解の個数を数えることもできる。このアルゴリズムの計算時間は、方程式の最大次数が d の場合、およそ $q^{n(1-1/O(d))}$ である。本研究では、方程式が多項式ではなくある種の算術回路で定義されるような一般化された問題も扱い、それに対するアルゴリズムも与える。

(5) 重み付対称素子を持つ限定段数回路：充足可能性、下界と圧縮

[学会発表]

回路の充足可能性問題とは入力として(組合せ)論理回路が与えられた時に回路が真を出力するような変数への真偽値割当が存在するかどうかを判定する問題である。この問題は代表的な NP 困難問題であり入力サイズの多項式の時間で解くことができないと信じられている。さらに入力として与えられる回路に制限がない場合は総当たり探索より高速なアルゴリズムが知られていない。

本研究では二段回路で出力に近い素子が重み付対称関数(排他的論理和や多数決の一般化)を計算し入力に近い素子が論理積を計算するようなものを扱い総当たり探索より高速なアルゴリズムを開発した。上記のような回路の充足可能性問題は最大充足可能性問題を含む一般性のある問題であることに注意されたい。

(6) 時相制約充足問題の頑健近似

[学会発表]

時相制約言語は $(Q, <)$ で一階の定義を持つ関係の集合である。CSP(G)とは時相制約言語 G の上で定義される時相制約充足問題である。

CSP(G)が頑健な近似を許すとは $(1-\epsilon)$ 割合の制約を満たすことが可能な例題に対して $(1-f(\epsilon))$ 割合以上の制約を満たす割当を求める多項式時間アルゴリズムが存在することをいう。ここで $f(\epsilon)$ は ϵ を 0 に近づけると 0 に近づく関数である。

我々は頑健な近似を許す時相制約言語 G の必要十分条件を求めることに成功した。また頑健な近似を許す G に対してほぼ線形時間のアルゴリズムを与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

Suguru Tamaki and Yuichi Yoshida. Approximation Guarantees for the Minimum Linear Arrangement Problem by Higher Eigenvalues. ACM Transactions on Algorithms (to appear) 査読有

Alexander Golovnev, Alexander S. Kulikov, Alexander V. Smal and Suguru Tamaki. Gate elimination: Circuit size lower bounds and #SAT upper bounds. Theor. Comput. Sci. 719: 46-63 (2018) 査読有
doi: 10.1016/j.tcs.2017.11.008

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki and Junichi Teruyama. Improved exact algorithms for mildly sparse instances of Max SAT. Theor. Comput. Sci. 697: 58-68 (2017) 査読有
doi: 10.1016/j.tcs.2017.07.011

Suguru Tamaki and Osamu Watanabe. Local Restrictions from the Furst-Saxe-Sipser Paper. Theory Comput. Syst. 60(1): 20-32 (2017)
doi: 10.1007/s00224-016-9730-0

Suguru Tamaki. Parallel Repetition of Two Prover One Round Games: An Exposition. Interdisciplinary Information Sciences, 21(4):289-306 (2015) 査読有
https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/21/4/21_2015.L.01/article

Suguru Tamaki and Yuichi Yoshida. A query efficient non-adaptive long code test with perfect completeness. Random Struct. Algorithms 47(2): 386-406 (2015) 査読有
doi: 10.1002/rsa.20549

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto and Suguru Tamaki. Solving Sparse Instances of Max SAT via Width Reduction and Greedy Restriction. Theory Comput. Syst. 57(2): 426-443 (2015) 査読有
doi: 10.1007/s00224-014-9600-6

[学会発表](計16件)

玉置 卓. Fine-Grained Complexity and Cryptography: A Personal Survey. 代数的手法による数理論号解析に関する研究集会, February, 2018 (九州大学, 福岡市) 招待講演

Akinori Kawachi, Kenichi Kawano, François Le Gall and Suguru Tamaki. Quantum Query Complexity of Unitary Operator Discrimination. The 23rd Annual International Computing and Combinatorics

Conference (COCOON), pages 309-320, August, 2017 (Hong Kong, China) 査読有

Suguru Tamaki. Beating Brute Force for Systems of Polynomial Equations over Finite Fields. ERATO 感謝祭 Season IV, August, 2017 (国立情報学研究所, 東京都千代田区) 招待講演

玉置 卓. 有限体上の多変数連立代数方程式系に対する総当り探索の打破. 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会, March, 2017 (南山大学, 名古屋市) 招待講演

Daniel Lokshantov, Ramamohan Paturi, Suguru Tamaki, R. Ryan Williams and Huacheng Yu. Beating Brute Force for Systems of Polynomial Equations over Finite Fields. The 28th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), pages 2190-2202, January, 2017 (Barcelona, Spain) 査読有

Suguru Tamaki. Recent Developments on Circuit Satisfiability Algorithms. Fine-Grained Complexity and Algorithm Design Reunion, December, 2016 (Simons Institute, UC Berkeley, USA) 招待講演

Alexander Golovnev, Alexander S. Kulikov, Alexander V. Smal and Suguru Tamaki. Circuit Size Lower Bounds and #SAT Upper Bounds Through a General Framework. The 41st International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS), August, 2016 (Krakow, Poland) 査読有

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki and Junichi Teruyama. Bounded Depth Circuits with Weighted Symmetric Gates: Satisfiability, Lower Bounds and Compression. The 41st International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS), pages 82:1-82:16, August, 2016 (Krakow, Poland) 査読有

Suguru Tamaki. Recent Developments on Circuit Satisfiability Algorithms. Computational Complexity Conference (CCC) Satellite Tokyo Workshop, May, 2016 (学会館, 東京都千代田区) 招待講演

Suguru Tamaki. Faster Satisfiability Algorithms for Systems of Polynomial Equations over Finite Fields and ACC0[p]. Workshop on Satisfiability Lower Bounds and Tight Results for Parameterized and Exponential-Time Algorithms, November,

2015 (Simons Institute, UC Berkeley, USA) 招待講演

Suguru Tamaki. Solving Systems of Polynomial Equations over GF(2) via Degree Reduction. Department of Computer Science Colloquium, October, 2015 (University of Nevada, Las Vegas, USA) 招待講演

Suguru Tamaki. Satisfiability Algorithms for Small Depth Circuits with Symmetric Gates. Workshop on Connections Between Algorithm Design and Complexity Theory, October, 2015 (Simons Institute, UC Berkeley, USA) 招待講演

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki and Junichi Teruyama. Improved Exact Algorithms for Mildly Sparse Instances of Max SAT. The 10th International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC), September, 2015 (Patras, Greece) 査読有

Suguru Tamaki and Yuichi Yoshida. Robust Approximation of Temporal CSP. The 17th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX), pages 419-432, September, 2014 (Barcelona, Spain) 査読有

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto and Suguru Tamaki. Solving Sparse Instances of Max SAT via Width Reduction and Greedy Restriction. The 17th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT), July, 2014 (Vienna, Austria) 査読有

Suguru Tamaki. The complexity of robust satisfiability of the constraint satisfaction problem. Dagstuhl Seminar 14201, May, 2014 (Schloss Dagstuhl, Germany) 招待講演

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~tamaki/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

玉置 卓 (TAMAKI SUGURU)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号: 40432413