

平成 30 年 4 月 25 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26330023

研究課題名(和文)多品種流・施設配置・ネットワークデザインに対する離散構造とアルゴリズム

研究課題名(英文) Discrete structures and algorithms for multiflow, facility location, and network design

研究代表者

平井 広志 (Hirai, Hiroshi)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・准教授

研究者番号：20378962

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題において、離散最適化分野における多品種流、施設配置問題、ネットワークデザイン問題にまたがる新しい有用な離散構造論を展開した。特に、整数格子上の離散凸関数の理論であった離散凸解析をより一般的な離散構造上へと部分的に拡張することに成功した。この理論に基づいて、これまで良いアルゴリズムが知られていなかった多品種流問題のクラスに対し組合せ的多項式時間アルゴリズムの開発した。さらに、その応用として、点容量型マルチカット問題へ組合せ的2近似アルゴリズムを開発した。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we developed a new theory of discrete structures across multicommodity flow, facility location, and network design problems in discrete optimization. In particular, we partially extended discrete convex analysis, which was a theory of discrete convex functions on the integer lattice, to more general discrete structures. Based on this theory, we developed combinatorial polynomial time algorithms to classes of multicommodity flow problems for which such good algorithms had not been known before. As an application, we provided a combinatorial 2-approximation algorithm to the node-multiway cut problem.

研究分野：離散最適化

キーワード：多品種フロー施設配置問題 ネットワークデザイン 離散凸解析 劣モジュラ最適化 多項式時間アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

多品種流とは、ネットワーク中に複数の異なる種類のフローが流れる状況を取り扱うネットワークフロー問題であり、施設配置問題とは、距離空間やネットワーク上に施設を効率良く配置する問題であり、ネットワークデザイン問題とは、連結度などの制約を満たす部分ネットワークの中で、最もコストが低いものを求める問題である。これらの問題群には多くの実用上の応用があることから離散最適化分野の中心的課題であるが、劣モジュラ最適化・離散凸解析といったこれまでの枠組みではうまく取り扱えなかった。

私自身は、これまでの研究で、多品種流と施設配置問題の双対性理論を確立し、また、フローのサポートにネットワークデザイン手法を系統的に用いる方法を編み出し、当該分野のいくつかの未解決問題を解決してきた。その中で鍵となったアイデアは、「あるクラスのグラフ上に離散凸関数を定義し、そして施設配置問題を離散凸関数の最小化とみなす」というものであり、多品種流、施設配置問題、ネットワークデザインの3つの問題群にまたがる有用な離散構造論の展開を示唆するものであった。

2. 研究の目的

本研究は離散最適化分野における多品種流、施設配置問題、ネットワークデザイン問題に対するこれまでになかった新しい離散構造論のさらなる展開と、それに基づく、各種問題クラスの計算複雑度の解明と多項式時間可解な問題クラスの拡充、そして、高速高性能な多項式時間アルゴリズム・近似アルゴリズム・ヒューリスティクス設計を目指すものである。具体的な目標としては、以下がある：

(a) 新しい劣モジュラ関数、 L 凸関数の研究：私が導入した新しい劣モジュラ関数、 L 凸関数のより詳しい性質を解明する。多くの重要な多品種流問題や施設配置問題がこの新しい L 凸関数最小化とみなせることがわかってきた。さらに、双劣モジュラ関数や k -劣モジュラ関数などの関連する重要な離散凸関数のクラスも含むこともわかってきた。これらの関連性を解明する。さらに、今まで離散凸解析において知られていた結果をこの新しい L 凸関数に拡張する。

(b) モジュラグラフ・モジュラ空間の離散構造論：(a)と連動して、新しい劣モジュラ関数、 L 凸関数の土台となるモジュラ半束や向き付け可能モジュラグラフの距離構造のさらなる理解が必要になる。例えば、 L 凸関数の最急降下法のステップ回数は、土台となる空間の距離構造に深く関わっている。メトリックグラフ理論の知見を応用して、これを解

明する。

(c) 歪優モジュラカバーの一般理論：多品種流問題においてフローのサポートをとることでネットワークデザイン問題にしたとき、しばしば、歪優モジュラカバーというクラスの問題となる。この問題クラスは、連結度増大問題などの多様な問題を含む重要なものであるが、その計算複雑度の研究は、まだ緒についたばかりである。私は、より広いクラスに対して計算複雑度を明らかにして、一般理論構築に向けた道筋を開く。

(d) 各種問題クラスに対するアルゴリズム設計：上述の離散構造研究に基づいて、種々の問題の高速な多項式アルゴリズム・近似アルゴリズム設計を目指す。具体的なターゲットとして、最小費用型と点容量型の多品種流問題がある。上述の意味での L 凸関数となることがわかっていおり、上記の研究成果の応用が期待出来る。多品種流問題とその双対施設配置問題は、NP困難な最適化問題の分数緩和をなっていることが多く、この関連を応用して、高性能な近似アルゴリズムや理論的に美しいヒューリスティクス設計を目指す。

3. 研究の方法

初年度は、本研究課題で扱う新しい離散構造に対する理解を深め、個々の問題に対する位置付け・関連性をより明らかにすることや、これまでの研究で培ったアイデアや手法を研ぎ澄ませることに重点をおく。次年度以降は、それらの離散構造論の研究成果を踏まえ、具体的な問題に対する計算複雑度解析や多項式時間アルゴリズム・近似アルゴリズム設計へとシフトする。特に、本研究課題の特色である「グラフや複体などの非ユークリッド的な空間上での最適化理論」という視点を指導原理に研究を推進する。そして国内・国際会議等での参加や発表を通じて世界へ情報発信し、国内・国外の研究者とも交流し、研究を推進する。

4. 研究成果

(a)と(b)に関しては、新しい劣モジュラ関数、 L 凸関数の一般論を構築した。特に目標であった最急降下法のステップ回数の解析や近接定理などを一般化することに成功した。また、多品種流やマルチカット問題などの具体的な問題群における双対目的関数として自然に現れることを示した。この結果は、雑誌論文7として出版された。

また k -劣モジュラ関数の最小化元集合がメディアン半束という特殊なモジュラ半束になることを明らかにし、非整合付半順序集合(PIP)という構造にコンパクトに表現できることを示した。この結果は雑誌論文4とし

て出版された。

(c)については、一般理論構築には至らなかったが、整数ネットワーク合成問題に対して多項式時間でとける新しいクラスとその多項式時間アルゴリズムを発見し、計算複雑度解明に貢献している。この成果は、雑誌論文6として出版された。

(d)については、上述の(a)(b)の成果に基づきターゲットであった最小費用自由多品種流問題と点容量型多品種流問題に対して組合せ的多項式時間アルゴリズムの開発に成功した。前者の成果は、雑誌論文3として出版された。後者のアルゴリズムは、狙いでもあったマルチカットの組合せ的2近似アルゴリズムにもつながっている。この成果は、プレプリント“A dual descent algorithm for node-capacitated multiflow problems and its applications”にまとめられ現在投稿中である。また、これらの成果をまとめた解説文を執筆し、雑誌論文5として出版された。

また、最終年度には、本研究課題の指導原理であった「グラフや複体などの非ユークリッド的な空間上での最適化理論」が具現化され、「CAT(0)空間上の凸最適化への連続緩和」というまったく新しいパラダイムにより、行列の標準形に関わる重要な無限モジュラ束上の劣モジュラ最適化問題に対し多項式時間アルゴリズムの開発した。この成果は、プレプリント“Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix”にまとめられ現在投稿中である。

以上の成果は、国際・国内学会を通じて学会発表されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

1. H.Hirai and G.Pap: Tree metrics and edge-disjoint S -paths, *Mathematical Programming, Series A*, 査読有, 147 (2014), 81-123.

DOI: 10.1007/s10107-013-0713-5

2. H.Hirai: Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, *Mathematical Programming, Series A*, 査読有, 155 (2016), 1-55.

DOI: 10.1007/s10107-014-0824-7

3. H.Hirai: L-extendable functions and a proximity scaling algorithm for minimum cost multiflow problem, *Discrete Optimization*, 査読有, 18 (2015), 1-37.

DOI: 10.1016/j.disopt.2015.07.001

4. H.Hirai and T.Oki: A compact

representation for minimizers of k -submodular functions, *Proceedings of 4th International Symposium on Combinatorial Optimization (ISCO'16)*, LNCS 9849, 査読有, 2016, pp. 381-392.

DOI: 10.1007/978-3-319-45587-7_33

5. H.Hirai: Discrete Convex Functions on Graphs and Their Algorithmic Applications, In: T. Fukunaga and K. Kawarabayashi (eds.) *Combinatorial Optimization and Graph Algorithms*, *Communications of NII Shonan Meetings*, Springer Nature, Singapore, 査読有, (2017), pp. 67-101.

DOI: 10.1007/978-981-10-6147-9_4

6. H.Hirai and M.Nitta: On integer network synthesis problem with tree-metric cost, *JSIAM Letters*, 査読有, 9 (2017), 73-76.

DOI: 10.14495/jsiaml.9.73

7. H.Hirai: L-convexity on graph structures, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 査読有, 61 (2018), 71-109.

DOI: 10.15807/jorsj.61.71

[学会発表](計15件)

1. 平井広志: “多品種流と距離空間”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 2014年秋季研究発表会特別講演, 北海道科学大学, 北海道, 2014年8月28, 29日.

2. 平井広志: “Weakly modular graphs and nonpositive curvature”, 第26回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学みなとみらいキャンパス, 横浜, 2014年11月7, 8日

3. 平井広志: “L拡張可能関数と最小費用多品種流問題に対する近接スケリング法”, 最適化: モデリングとアルゴリズム, 統計数理研究所, 立川, 2015年3月19, 20日.

4. 平井広志: “グラフ上の離散凸関数: その応用と展望”, 室田一雄教授還暦記念シンポジウム「数理工学の伝統と潮流」, 東京大学本郷キャンパス, 2015年4月11日.

5. 平井広志: “Weakly modular graphs and nonpositive curvature”, 東北大学幾何セミナー, 東北大学, 仙台, 2015年7月7日.

6. H.Hirai: “Some combinatorial optimization problems related to metric spaces of nonpositive curvature”, *Geometry Seminar*, University of Wroclaw, Wroclaw, Poland, September 3, 2015.

7. H.Hirai: “Combinatorial algorithms for some multiflow problems and related network designs”, Connectivity Workshop, HIM, Bonn, Germany, September 7-11, 2015.

8. H.Hirai: “Combinatorial algorithms for some multiflow problems and related network designs”, Shonan Meeting: Current Trends in Combinatorial Optimization, Shonan Village Center, Kanagawa, April 11-14, 2016.

9. H.Hirai and T.Oki: “A compact representation for minimizers of k-submodular functions”, 4th International Symposium on Combinatorial Optimization (ISCO 2016), Salerno, Italy, May 16-18, 2016.

10. H.Hirai: “Discrete Convex Analysis beyond Z^n ”, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2016), Kyoto University, Kyoto, May 21-25, 2016.

11. 平井広志: “点容量型多品種フロー問題に対する双対降下法とその応用”, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会 (COMP), 石川県教育会館, 金沢, 2016年6月24, 25日.

12. 平井広志: “ブロック行列の DM 分解について”, 応用数理学会研究部会連合発表会, 電気通信大学, 調布, 2017年3月6,7日.

13. H.Hirai: “Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix”, 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Budapest, Hungary, May 22-25, 2017.

14. H.Hirai: “Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix”, Diskrete Mathematik / Geometrie Seminar, TU-Berlin, Berlin, Germany, May 31, 2017.

15. 平井広志: “Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix”, Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA-2017)・離散数学とその応用研究集会 2017, 熊本大学, 熊本市, 2017年8月17-19日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~hirai/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平井 広志 (HIRAI, Hiroshi)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・准教授

研究者番号: 20378962