様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６３３００２４

研究課題名（和文）大規模凸最適化問題に対する加速（劣）勾配法ー実装を重視した理論の構築とその応用ー

研究課題名（英文）Accelerated (sub)gradient methods for large-scale convex optimization problems - with emphasis in the theoretical aspects of the implementation and its applications -

研究代表者
福田　光浩（Fukuda, Mituhiro）

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：８０３３４５４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：現在の情報社会では大量のデータを容易に収集して蓄積でき，そこから有益な情報を抽出するために大規模な凸最適化問題を高速に解くニーズが急速に高まっている．そこで近年，特に注目を浴びているのが理論的には難解であるが，実装が容易な加速（劣）勾配法である．本研究ではこの加速（劣）勾配法の本質的な収束速度を解明すべく，代表的な手法が満たすべき性質を見出し，この性質をもとに新たな加速（劣）勾配法族を提案することに成功した．
またサブテーマとして，特殊構造を有する凸最適化問題に対して関数値と勾配の値だけで構築できるカスタマイズされた手法を提案し，その性能を数値実験などを通して確認を行った．

研究成果の概要（英文）：In the current information society where large amount of data can be easily obtained and stored, there is a urgent need to solve large-scale convex optimization problems that can retrieve only valuable information (from that data). Very recently, the so-called accelerated (sub)gradient methods have been focused because they are easy to implement, but are very hard to understand theoretically. In this project, we analyze some properties that well-known (sub)gradient methods should satisfy in order to find some essential properties which guarantee fast convergence of these methods. And then, based on these properties, we propose a new family of (sub)gradient methods.
As a secondary theme, we proposed customized methods which work only with the function and gradient values for convex optimization problems which have special structures. We also conducted some numerical experiments to confirm their performance.

研究分野： 数理最適化

キーワード： 加速（劣）勾配法　一次法　凸最適化問題　射影勾配法　最急降下法

１．研究開始当初の背景

現在の情報社会では大量のデータを容易に収集して同時に蓄積でき，そこから有益な情報を抽出するために大規模な凸最適化問題を高速に解くニーズが急速に高まっている．そこで近年，特に注目を浴びているのが理論的には難解であるが，実装が容易な加速（劣）勾配法である．

加速（劣）勾配法が提案された１９８０年初頭と異なり，データ収集能力と保存形体が著しく向上した現在では，有用な情報を得るのに計算時間が爆発的にかかる最適化問題が多々存在する．これは，一昔前にはデータマイニングと呼ばれていたが，現在は統計や機械学習などの分野の一部となっていると言える．特に，一次法と呼ばれる手法では，凸最適化問題の最小化したい凸関数の関数値と（劣）勾配のみで最小値が求まり，現在研究が盛んに行われている．その中でも最小化したい関数の（劣）勾配がLipschitz連続もしくは有界である場合にのみ真価を発揮する加速（劣）勾配法はその挙動が非直感的であり，なぜ少ない反復回数で理論的な収束が保証できるのかという問いに未だ最終的な説明が存在しない．

これらの手法と関連して，より特殊な構造を有した大規模凸最適化問題に対して，よりカスタマイズされた手法が当然ながら要求されるのも事実である．これは例えば統計，画像や動画圧縮，信号処理などの分野にて現れる問題である．

２．研究の目的

本研究の主な目的は凸最適化問題に対する加速（劣）勾配法のメカニズムを解明することである．そのためには理論面，実装面など多岐なアプローチが必要となる．そして，関連するテーマとして，特殊な構造を有した凸最適化問題に対して，それぞれの特徴を最大限生かすような関数値と勾配のみで定義できる新しい手法を提案することが挙げられる．

３．研究の方法

凸最適化問題に対する（劣）勾配法の研究に関しては，まず既存の手法の本質的な性質を解析し，共通する性質を見出すことから始まった．それにより，全体図が見えたことも事実ではあるが，類似する手法が多数あり，変数名や生成される点列のズレによる違いなどから比較が必ずしも容易なものではなかった．

特殊構造を有する最適化問題に対するカスタマイズされた手法に関しては，それぞれの問題の特性をまず確認する必要があった．特に，疎性をもつ（逆）分散共分散行列推定型問題に関しては，とても良い性質を発見し，従来の手法を厳密に実行しなくても最終的に正しい解が生成されることが理論的にも確認できた．また，疑似乱数によって生成した問題に対して，本研究で提案した手法と既存手法との比較数値実験を行った．

狭義２次凸関数最小化に対する新しい発見的手法に関しては，類似する手法を全て実装し，文献で用いられた方法で生成した問題に対して，数値実験を行った．その結果，色々な性質が見出され，最終的に新たな発見的手法を提案する手がかりとなった．

４．研究成果

加速（劣）勾配法は１９８３年にNesterovによって提案され，同時期に連続最適化の分野において革新的な発見となった内点法に押されて暫くの間ほとんど注目されることがなかった．しかし、２０００年代後半になり，内点法に関する研究に一段落がつくと，大規模凸最適化問題を解く効率的な手法として復活することとなった．数ある加速劣勾配法の中でも mirror-descent 法（Nemirovskii-Yudin，１９７９年）やdual-averaging法（Nesterov，２００９年）は他の手法と比べて，分かりやすい手順から構成され，良く知られた手法であると言える．

本研究の主な成果として，前述の２つ手法を含む統一的な枠組みを考案し，加速（劣）勾配法の手法族を提案することに成功したことが挙げられる．その概念は最適な計算量を保証する性質を幾つか見出し，それらを性質A，性質Bとまとめたものである．これらは，加速（劣）勾配法の各反復で構築する必要がある補助最適化問題が満たすべき性質を反映している．具体的には初期の補助最適化問題が満たすべき性質，現反復とその一つ前の反復で解くべき補助最適化問題の目的関数が満たすべき不等式，そして，生成される点列が補助最適化問題の目的関数のある値以下を保証すべき性質などである．

前述の性質Aと性質Bを提案することにより，今までは手法毎に行われていた各手法の最大反復回数の上限の解析が，一つの統一された枠組みのなかで行うことが可能となった．証明における理論的な構成要素が明確になった．また，この性質Aと性質Bは提案している加速（劣）勾配法族が「最適な」反復回数で収束するための十分条件を保証するという解釈ができる．よって，今後，加速（劣）勾配法の本質的な挙動を知るためには，これらの性質Aと性質Bが「最適な」反復回数を保証する必要条件になるかを調べる必要がある．

なお，上記の結果の副産物として，提案した加速（劣）勾配法族は次の比較的簡単な構造を持った凸最適化問題にも適用可能である．いずれも目的関数の性質に関するものである．a)平滑な凸関数，b)平滑な凸関数と凸関数の和であるような関数，c)不正確なオラクルモデル，d)弱平滑関数，そしてe)これらの任意の組み合わせから構成される関数．なお，いずれの場合も関数の一部が（劣）微分可能であり，その（劣）勾配がLipschitz連

続もしくは有界であるという仮定と，制約式が単純で補助最適化問題が元の最適化問題と比較して計算量の意味で簡単に解が求まる必要がある．なお，補助最適化問題の厳密解ではなく近似解のみで構築できる手法に関しては，今後の課題となっている．

最後に，元の mirror-descent 法では，最悪ケースにおける計算量（反復回数）の意味で「最適な手法」であるためには，実行可能領域の有界性が必要であった．しかし，今回提案した拡張 mirror-descent 法では実行可能領域の有界性を仮定しなくても「最適な手法」となっていることが証明できた．

以降は，特殊な構造を持った凸最適化問題についての議論に移る．

まず，疎性をもつ（逆）分散共分散行列推定型問題に関しては，Barzilai-Borwein のステップサイズを用いた射影勾配法を新たに提案した．これは，主問題とある意味で同値な双対問題に着目し，各反復点から関数の勾配方向の定数倍（Barzilai-Borwein のステップサイズ）で得られる点を実行可能領域（諸条件を満たす集合）への（直交）射影を計算して動く手法である．一般には，この射影を正確に求めることは計算量の意味では困難である．しかし，実行可能領域を分割して，交互に１回ずつ射影を行うことにより，理論と実装の面で遜色がない手法が提案できることが分かった．つまり，このように次反復点を実行可能領域に正確に射影をしなくても，手法が最適値に収束する点列を生成することを理論的に証明した．また，この結果を裏付けて実装を確認する意味で，数値実験を行った．疑似乱数によって生成されて疎性をもつ（逆）分散共分散行列推定型問題に対して，本研究で提案した手法と既存手法との比較数値実験を行った結果，提案手法が他の３手法より計算時間が短く，最適値と比較精度も優れていることが確認できた．

次に，無制約の狭義２次凸関数最小化を実現する新たな発見的手法を提案した．これは，２０１６年に C. C. Gonzaga によって提案された Chebychev 近似による手法をベースに未知である狭義２次凸関数を記述する正定値行列の最大固有値と最小固有値を推定しながら反復する手法である．１９５９年の赤池弘次先生の論文によって，最急降下法を狭義２次凸関数最小化に用いると，その収束の速度がこの二つの値に依存していることが知られている．生成される点列から最大固有値を推定することは比較的容易であるが，特に最小固有値が零に近いケースの推定が難しく，結局はその精度によって手法の性能が左右されてしまうことが知られている．しかし，今回提案した発見的手法においてはその推定はある意味成功しているのではないかと思われる．特に，類似の研究に用いられた疑似乱数を用いた狭義２次凸関数を生成し，比較数値実験を行った結果，既存の最急降下法をベースにした手法とほとんどの場合，優位性が確認できた．また，予想していた通り，そのような手法は狭義２次凸関数を決める正定値行列の固有値の分布に左右さえることを数値実験により確認できた．

最後に，画像や動画圧縮系問題に登場する凸最適化問題に関しては，交互方向乗数法を提案した．しかし，予備数値実験から今後，大規模な問題に適用するにはさらなる並列化と計算ルーチンの高速化が必要であることが分かった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Masaru Ito and <u>Mituhiro Fukuda</u>, “A family of subgradient-based methods for convex optimization problems in a unifying framework,” *Optimization Methods and Software*, **31** (2016), pp. 952-982　査読有.

② Masaru Ito, “New results on subgradient methods for strongly convex optimization problems with a unified analysis,” *Computational Optimization and Applications*, **65** (2016), pp. 127-172 査読有.

〔学会発表〕（計 12 件）

① 伊藤勝，<u>福田光浩</u>，「凸最適化に対する一次法の再出発法と未知パラメータへの適応」，日本オペレーションズ・リサーチ学会　２０１８年春季研究発表会，2018 年.

② <u>Mituhiro Fukuda</u>, Takashi Nakagaki, and <u>Makoto Yamashita</u>, “An efficient nonmonotone spectral projected gradient method for semidefinite program with log-determinant and l_1-norm function,” The 10th Anniversary Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2017 年.

③ <u>Mituhiro Fukuda</u>, “A comparative study of steepest descent methods for strongly convex quadratic functions,” Workshop on Advances in Optimization, 2016 年.

④ <u>Mituhiro Fukuda</u> and Kensuke Gotoh, “A comparative study of steepest descent methods for strongly convex quadratic minimization,” XI Brazilian Workshop on Continuous Optimization, 2016 年.

⑤ Masaru Ito, “New results on subgradient methods for weakly smooth and strongly convex problems,” 22nd International Symposium on Mathematical Programming, 2015 年.

⑥ <u>Mituhiro Fukuda</u> and Kensuke Gotoh, “A numerical comparative study of steepest descent methods for strongly convex quadratic minimization,” 22nd International Symposium on Mathematical Programming,

2015 年.

⑦ 伊藤勝，「凸最適化問題に対するヘルダー条件のもとでの最適な劣勾配アルゴリズムの提案」，WOO@つくば―未来を担う若手研究者の集い２０１５―，2015 年.

⑧ 伊藤勝，「凸最適化問題に対するヘルダー条件のもとでの最適な劣勾配アルゴリズムの提案」，日本オペレーションズ・リサーチ学会　２０１５年春季研究発表会，2015 年.

⑨ Mituhiro Fukuda, Takashi Nakagaki, and Makoto Yamashita, "A new nonmonotone spectral projected gradient method for semidefinite program with log-determinant and l1-norm function," 1107th American Mathematical Society Meeting, Spring Eastern Sectional Meeting, 2015 年.

⑩ Makoto Yamashita, Mituhiro Fukuda, and Takashi Nakagaki, "Dual approach based on spectral projected gradient method for log-det SDP with L1 norm," SIAM Conference on Optimization, 2014 年.

⑪ Masaru Ito and Mituhiro Fukuda, "A unified framework for subgradient algorithms minimizing strongly convex functions, SIAM Conference on Optimization, 2014 年.

⑫ Mituhiro Fukuda and Junki Kobayashi, "Some insights from the stable compressive principal component pursuit," SIAM Conference on Optimization, 2014 年.

６．研究組織

(1)研究代表者

福田　光浩（FUKUDA, Mituhiro）
東京工業大学・情報理工学院・准教授
研究者番号：８０３３４５４８

(2)連携研究者

山下　真（YAMASHITA, Makoto）
東京工業大学・情報理工学院・准教授
研究者番号：２０３８６８２４

(3)研究協力者

伊藤　勝（ITO, Masaru）
日本大学・理工学部・助手