

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26330025

研究課題名(和文) 錐線形計画における退化とモデリング

研究課題名(英文) Conic Programming: Degeneracy and Modeling

研究代表者

村松 正和 (Muramatsu, Masakazu)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：70266071

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：多項式最適化問題に対する半正定値緩和に関して、問題が必要な条件を満たさず手法自体が精確な計算のもとでは最適値に収束しないにもかかわらず、計算機を用いて誤差を含んだ計算を行うと最適値が得られるという不思議な現象に対して、理論的な説明を与えた。この結果はまさに当初の研究目的(の一部)を達成するものである。また、錐線形計画のサブクラスである2次錐計画問題および半正定値計画問題における弱実行不能という退化現象に関して、新しい理論的知見を与えた。特に、許容性問題の新しい分解法を提案し、これにより、元問題の許容性判定をより小さな許容性問題に落とし込むことに成功した。

研究成果の概要(英文)：It is known that the semidefinite programming (SDP) relaxation method for polynomial optimization problems (POPs) can sometimes find the optimal value of POP although the true optimal value of SDP is different from the value. We gave a theoretical explanation for the mysterious phenomenon. This result is exactly to accomplish (part of) the original research objective. In addition, we gave new theoretical findings on degeneracy such as weak infeasibility in second-order programming problems and SDPs. In particular, we propose a new decomposition method for conic feasibility problems, and succeeded in shrinking the feasibility problem into smaller problems.

研究分野：数値的最適化

キーワード：錐線形計画 半正定値計画 2次錐計画 モデリング 多項式計画

## 1. 研究開始当初の背景

錐線形計画は線形計画 (Linear Programming, 以下 LP) の凸性を保ちながらの拡張であり、錐の取り方により様々な有用な最適化モデルが導かれることから、現在盛んに研究されている。特にそのサブクラスである2次錐計画問題(SOCP)、半正定値計画問題(SDP)は内点法を用いて効率よく求解可能であり、その非線形を生かして様々なモデリングに使われている。

例えば近年注目を浴びているのは多項式計画問題 (Polynomial Optimization Problems; 以下 POP) の半正定値計画問題による緩和法 (SDP 緩和) である。POP は多項式不等式を持つ最適化問題であり、一般に NP 困難な問題であるが、この大域的最適解を、SDP という錐線形計画を用いて計算しようとするものである。理論的な枠組みは Lasserre (2002) により提案された。

錐線形計画においては、双対ギャップがあったり、最適解が存在しない場合がある。これは一種の退化現象であり、乱数を用いて人工的に作成した問題では確率0でしか生成されないが、実際の応用ではしばしば現れる。現在、SDP に対する標準的な解法である主双対内点法は、このようなインスタンスに対しては収束の証明がなされていない。

特に POP の SDP 緩和で現れる問題では、このような退化が本質的に起こりうることが指摘され、以下のことが観察されている。

- (1) 通常の SDP ソルバーが、解くべき SDP の最適値と全く異なる値を「最適値」として返すこと。
- (2) その「最適値」は、POP の最適値 (=元来计算したい値) であること。

一般にソルバーが正しくない値を返すことは望ましいことではないが、この場合は逆にたいへん望ましいことになっているという、非常に不思議なことが観察されているのである。

## 2. 研究の目的

上記の不思議な現象は、問題データや途中の計算において誤差が混入することにより、異なる SDP を解くことになり、それが望ましい性質を持っていると思われる。この現象の理由を解き明かすのが研究当初の最大の目的であった。

またそのためには、錐線形計画における退化の理解や凸錐の面に関する理解を深めることも大切であり、これも研究目的の1つであった。この方向の研究目的は、以下の3つの部分テーマに分かれていた。

- (1) 錐線形計画における双対性および面構造について、より詳しい理論の開発・特徴付けを行う。

- (2) 特に最近話題になっている共正値錐や完全正値錐といった錐に関して、上記の理論の開発等を行う。(共正値錐と完全正値錐は、近年 NP 困難な問題の錐線形計画への定式化として、重要と目されている錐である。)
- (3) 面的削減アルゴリズム (Facial Reduction Algorithm) の適用可能性を考察する。

さらに進めて、誤差を意図的に混入させることにより、望ましい値を計算させるようなモデルの一般論を展開する。特に統計や機械学習における正則化などとの関連を追及することも目的としていた。

## 3. 研究の方法

主に理論的な研究であり、理論を打ち立てて論文を書くことが主な作業であった。ときに応用面の考慮をしたり、計算機実験を行うなどした。

まず POP の SDP 緩和に関して具体的な例を元に考察を行い、それを一般化させる、という手順を踏んで成果を得た。

続いて、面的削減アルゴリズムを用いた様々な凸解析、凸計画の手法を開発し、これらを用いて周辺の問題にも切り込んでいった。これらが相乗作用を生み、次々と新しい成果を得ることができた。

## 4. 研究成果

まず第1に、上記の不思議な現象が有限桁の計算しかできないコンピュータを使用することによる不可避な現象であることを、理論的に説明することができた(論文(5))。基本的には、極めて小さな誤差のあるおかげで、POP の2乗和多項式による近似がうまくできて、SDP ソルバーの計算する間違っただ最適値が POP の最適値となることを示すことができた。

次に、錐線形計画のサブクラスである2次錐計画問題および半正定値計画問題における弱実行不能という退化現象に関して、新しい理論的な知見を与えた。特に、許容性問題の新しい分解方法を提案し、これにより、元問題の許容性判定をより小さな許容性問題に落とし込むことに成功した。この分解手法を用いて、様々な解析を行い、特に弱実行不能な問題全体に対して新しい観点を与えた。これらは論文(3)、(4)として発表され、(3)は日本オペレーションズリサーチ学会のJROJS論文賞を受賞した。これは、当初の「錐線形計画における退化の理解や凸錐の面に関する理解を深めること」を達成したものとみることができる。

さらに副産物として、以下の研究を成し遂げた。

- (1) SDP に関して、主双対内点法の挙動を理想化したオラクルを仮定し、これを用い

ると(たとえ問題が退化していても)必ず解か、または許容解が存在しないことの証拠を売ることができることを示した。この結果はなどで発表した。論文にもまとめたが、まだジャーナルに受理されていない。

- (2) 多面錐の場合には、退化していても弱実行不能や双対ギャップなどの状態にはならないことは以前から知られていた。この意味で、面削減法を用いて錐を部分空間に制限していった場合に、多面錐になったとしたらそれ以上面削減をする必要はなくなる。それでは、錐が多面錐と非線形錐との直積で書かれている場合はどうか、という問題を考え、解析を行った。結果として、「非線形錐の相対的内点が得られれば、双対ギャップはなくなる」という新しい定理を得た。
- (3) ネットワーク混雑問題を考え、需要予測に誤差がある場合に対してロバスト最適化の考え方を適用し、新しいモデルを提案した。博士後期課程学生と研究を進め、数値実験を行った。このとき、(2)で得られた定理を用いてモデルの正当性を証明した。この研究は雑誌論文(1)として発表され、博士後期課程学生の博士論文の主要部分となった。
- (4) 最近 Chubanov によって発表された同次形 LP の内点許容解を射影とスケーリングによって求めるアルゴリズムを、錐線形計画の一種である対称錐線形計画に拡張した。得られた計算複雑度は、従来のものとは異なり、多くの場合により良いものとなっている。また、これに関して数値実験を行った。
- (5) あるグラフ上の情報拡散ゲームに関して、純粋戦略がナッシュ均衡となる場合を全て明らかにした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

- (1) Bimal CHANDRA DAS, Satoshi TAKAHASHI, Eiji OKI, Masakazu MURAMATSU, Network Congestion Minimization Models Based on Robust Optimization, IEICE Transactions on Communications, 2017/EBP, 3193-3193 (2017). (査読有)
- (2) Yuki Sukenari, Kunihiro Hoki, Satoshi Takahashi, Masakazu Muramatsu, Pure Nash Equilibria of Competitive Diffusion Process on Toroidal Grid Graphs, Discrete Applied Mathematics, 215, 31-40(2016). (査読有)
- (3) Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya, A Structural Geometrical Analysis of Weakly

Infeasible SDPs, Journal of Operations Research Society of Japan, 59/ 3, 241-257(2016). (査読有)

- (4) Bruno F. Lourenço, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya, Weak infeasibility in second order cone programming, Optimization letters, 1-13(2016). (査読有)
- (5) Masakazu Muramatsu, Hayato Waki, Levent Tunçel, Perturbed sums-of-squares theorem for polynomial optimization and its applications, Optimization Methods and Software, 31/ 1, 134-156 (2015). (査読有)

〔学会発表〕(計 11 件)

- (1) Masakazu Muramatsu, Bruno F. Lourenco, Takashi Tsuchiya, Partial Polyhedrality and Facial Reduction, SIAM Conference on Optimization, 2017.
- (2) Bruno F. Lourenco, Tomonari Kitahara, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya, An extension of Chubanov's algorithm to symmetric cone feasibility problems, 研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」2017.
- (3) Bimal CHANDRA DAS, Eiji OKI, Masakazu MURAMATSU, Network Congestion Minimization Models Based on Robust Optimization, 研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」2017.
- (4) Bruno F. Lourenco, 北原 知就, 村松 正和, 土谷隆, 対称錐に対する Chubanov のアルゴリズムの拡張, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会.
- (5) 市橋志朗, 村松 正和, 三角形総面積最大化問題に関する研究, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会.
- (6) Bruno F. Lourenco, 村松 正和, 土谷隆, 内点オラクルによる錐線形計画問題の完全な求解, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年秋季研究発表会.
- (7) Bimal CHANDRA DAS, Eiji OKI, Masakazu MURAMATSU, A Mixed-Integer SOCP Model for Robust and Power Efficient Networks, International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT) 2016.
- (8) Takashi Tsuchiya, Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu, Solving SDP completely with an Interior-Point Oracle, International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT) 2016.
- (9) Masakazu Muramatsu, Bruno F. Lourenco, Takashi Tsuchiya, Weak Infeasibility, Facial Reduction, and Geometry in

Conic Programming, International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT) 2016.

- (10) Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya, FRA-Poly, Partial Polyhedrality and Facial Reduction, International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT) 2016.
- (11) 櫻井亮佑, 村松正和, 高橋里司, 保木邦仁, さまざまなグラフにおける情報拡散ゲームのナッシュ均衡に関する考察, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015年春季研究発表会

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

村松 正和 (MURAMATSU Masakazu)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授  
研究者番号：70266071

### (2) 研究分担者

土谷 隆 (TSUCHIYA Takashi)  
政策研究大学院大学・政策研究科・教授  
研究者番号：00188575