

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26330053

研究課題名(和文) 多変量正規性検定方式の開発

研究課題名(英文) Testing for multivariate normality

研究代表者

中川 重和 (Nakagawa, Shigekazu)

岡山理科大学・総合情報学部・教授

研究者番号：90248203

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：課題1に関して、一変量の場合の標本歪度・尖度の同時密度関数モデルによるグラフィカルな正規性の検定手法を提案した。成果は、雑誌「計算機統計学」に掲載された。さらに多変量正規性検定へ応用した結果は、国際会議The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meetingにおいて発表された。

課題2に関して、正規母集団からの標本歪度と標本尖度の同時密度関数および同時モーメントの漸化式での表現を与えた。成果は、雑誌Communications in Statistics - Theory and Methodsにおいて発表された。

研究成果の概要(英文)：As a first fruit, we give a new graphical method testing for normality based on an approximate joint probability density function of the sample skewness and kurtosis. In addition, we develop a new graphical method to access the multivariate normality combining with the principal component method.

Secondly, we give a recurrence formula for the joint distribution of the sample skewness and kurtosis. Moreover, we obtain a recurrence formula for their product moments and their exact expression up to the requisite order.

研究分野：統計科学

キーワード：正規性 歪度 尖度 キュムラント

1. 研究開始当初の背景

多変量解析における推測方式の多くは、得られたデータが多変量正規母集団からの無作為標本であることを前提としている。この前提を保証するのが多変量正規性の検定である。

正規性の検定方式の開発には、1) 検定統計量の提案、2) その帰無仮説のもとでの分布（もしくは近似分布）導出、3) 提案統計量と既知のそれとの検出力の比較を通しての優位性の検証、の3段階がある。

Mardia を起源とした**多変量標本歪度・尖度**が定義され、1970年代以降それらの漸近分布の導出などが研究されている。また、Srivastava らの別の定義に基づく統計量の提案もなされている。

しかしながら、いずれも上述のステップ2)の途中段階である、つまり、数理統計学的側面として、小標本での**精密分布の導出**(課題2)が課題である。

一方、高次元データ、ビッグデータ時代を迎え探索的データ解析手法が囑望される現在、一変量正規性検定での qq プロットに代表される**視覚的な検定方式の開発**(課題1)は喫緊の課題である。Srivastava においても主成分に対する qq プロットが提案されているが、グラフ表現法としては不十分に思われる。なお、本研究を遂行するにあたり、一変量の正規性検定での手法(代表者らの開発手法も含む)を援用する。なかでも、Shenton and Bowman の一変量の標本歪度・尖度の近似同時密度関数は課題1の、そして Nakagawa et. al. での一変量の標本歪度・尖度の同時モーメント公式は課題2の鍵を握る手法となる。

2. 研究の目的

本研究では、探索的データ解析の側面と数理統計学的側面の両面から、多変量正規性検定方式の開発を行う。代表者らの成果も含めた一変量の正規性検定方式に関する既存結果を発展させることを念頭におきつつ、第一は一変量正規性検定での qq プロットのような**多変量正規性検定のためのグラフ表現法**を開発する。第二は、帰無仮説のもとでの**多変量標本歪度・尖度の精密分布の導出**(もしくは正規化変換等の近似分布の導出)である。なお、多変量標本歪度・尖度は種々定義されており、これら既存の統計量の精密分布導出

に終わらず、第二においては正規性検定によりふさわしい統計量を提案したい。

3. 研究の方法

本研究は、2つの課題[課題1. 多変量正規性のためのグラフ表現法の開発、課題2. 多変量標本歪度・尖度分布の小標本での近似分布導出]からなる。代表者・中川が総括をするとともに、分担者1名、連携研究者1名の研究体制のもとに課題解決にあたる。

課題1を研究期間の前半に、課題2を後半に据え、相互の課題の連携も図る。代表者が研究総括とともに各課題の数理的基礎理論の構築を行う。研究分担者・橋口氏は各課題の数値実験による妥当性の保証を主幹する。連携研究者・仁木氏には、アドバイザーとして研究全般を俯瞰してもらう。また、代表者が数値実験のプロトタイププログラムを作成する際の補助として、中川研 B4 の学生に依頼する。

4. 研究成果

課題1の解決策として、まず初めに一変量の場合の標本歪度・尖度の同時密度関数モデルによるグラフィカルな正規性の検定手法を提案した。さらに、提案手法が、検出力の観点において、既存の検定統計量ほぼ同等であることを示した。検出力でほぼ同等であるならば、提案手法が視覚的に結果を表示している点で優位であることは自明である。

成果は、2016年に雑誌「計算機統計学」に「総括的な正規性検定のためのグラフ表現」として刊行された(雑誌論文①)。なお、学会発表では、①が関連している。

上記内容の多変量正規性検定への応用を志向するためのアイデアが、[グラフ表現法] = [分散共分散行列の主成分の歪度・尖度] + [一変量歪度・尖度の同時密度関数モデル]であり、

これを実現したのが、学会発表②で、香港で開催された国際会議The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meetingにおいて、演題Graphical method on an omnibus test for normalityとして発表した。現在、成果物を国内雑誌へ投稿中である。

課題2に関して、正規母集団からの標本歪度と標本尖度の同時密度関数の漸化式の漸化式での表現を与えた。さらに、同時モーメントの漸化式も与え、高次モーメントの完全な表現を導いた。現時点では、正規母集団からの標本歪度の分布に関して様々知られているのに対し、標本尖度のそれはほとんど有効な手立てが知られていない状況である中、本成果により、標本尖度分布を調べる道具立てができたことは意義深い。今後さらにこの成果の応用が期待されている。なお、このことの成果として、雑誌Communications in Statistics - Theory and Methodsにおいて、

Recurrence formula on the joint distribution of sample skewness and kurtosis under normalityとして発表した(雑誌論文②)。関連事項として、ピアソンが提案した歪度に基づく正規性の検定手法をまとめたのが、雑誌論文③である。

なお、本研究課題との関連として取り組んだ研究が、学会発表③④⑤である。これらは計算機代数で盛んに開発が進んでいるホロノミック勾配法を標本相関係数、標本重相関係数などの統計量分布へ応用したものである。

以上のように、研究期間中に当初掲げた二つの研究課題をほぼ全面的に解決できたことを再度報告する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① 中川重和・橋口博樹・仁木直人, 総括的な正規性検定のためのグラフ表現, 計算機統計学, 査読有, 29(1), 15-27, 2016.
- ② Shigekazu Nakagawa, Hiroki Hashiguchi and Naoto Niki, Recurrence formula on the joint distribution of sample skewness and kurtosis under normality, 査読有, Communications in Statistics - Theory and Methods, 45(4), 1148 - 1155, 2016.
- ③ Shigekazu Nakagawa, Hiroki Hashiguchi and Naoto Niki, A MEASURE OF SKEWNESS FOR TESTING DEPARTURES FROM NORMALITY, 査読有, Far East Journal of Theoretical Statistics, 52 (1), 61-74, 2016

[学会発表] (計 5 件)

- ① 中川重和, 正規性の検定について, 地域分析研究会, 2017, 3月.
- ② Shigekazu Nakagawa, Hiroki Hashiguchi Graphical method on an omnibus test for normality, The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting, June, 2016.
- ③ Hiroki Hashiguchi, Shigekazu Nakagawa and Yoko Ono, Holonomic properties for the distribution of the sample correlation coefficient, IASC-ARS 2015, Dec, 2015.
- ④ 橋口博樹, 中川重和, 標本相関係数の分布に対するホロノミック勾配法について, 2015年度統計関連学会連合大会, 2015年9月.
- ⑤ 中川重和, 橋口博樹, 小野陽子, 標本重相関係数分布の密度関数とHG法, 日本数式処理学会第24回大会, 2015年6月.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中川 重和 (NAKAGAWA SHIGEKAZU)
岡山理科大学・総合情報学部・教授
研究者番号：90248203

(2) 研究分担者

橋口 博樹 (HASHIGUCHI HIROKI)
東京理科大学・理学部第一部・准教授
研究者番号：50266920

(3) 連携研究者

仁木 直人 (NIKI NAOTO)
東京理科大学・工学部・名誉教授
研究者番号：10000209

(4) 研究協力者 なし
()