様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６３８０２４５

研究課題名（和文）混成動学における確率安定均衡

研究課題名（英文）Stohcastically stable equilibria in the hybrid play

研究代表者
丸田　利昌（MARUTA, Toshimasa）

日本大学・総合科学研究所・教授

研究者番号：６０２９５７３０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：混成動学は，ゲームにおける均衡の安定性と均衡選択の問題を一挙に考察する確率進化理論のあらたなモデルとして提唱された．本研究は，その予備的考察として安定性の問題，すなわち均衡に至るメカニズムの解明に努めた．均衡の一意性の一般化である交換可能性の考察を通じ，対可解ゲームと呼ばれる新たなゲームのクラスが発見された．対可解ゲームは，多数の応用モデルを含む豊かなクラスを形成する一方，いくつかの著しい理論的性質を持つ．特に，一定の条件のもと，劣位の戦略を逐次削除することにより均衡が到達されることが明らかとなった． すなわち，対可解ゲームは支配可解である．

研究成果の概要（英文）：The hybrid play has been proposed as a new approach in the stochastic evolutionary game theory, which investigates the stability and the selection of equilibria in games. As a preliminary study, this research focused its attention to the stability of equilibria with respect to the iterated eliminations of dominated strategies. An investigation of the interchangeability condition led to a new concept of a game, the pairwise solvable game. The class of pairwise solvable games is rich enough to include various games that frequently appear in applications, such as the electoral competition games, the rent-seeking games, and the tournament games. It is shown that the set of equilibria in a pairwise solvable game is interchangeable. Under a quasiconcavity condition, a generic pairwise solvable game with a linearly ordered strategies has a symmetric equilibrium. More important, if a quasiconcave pairwise solvable game is finite, it is dominance solvable.

研究分野：ゲーム理論

キーワード：ナッシュ均衡　確率進化　ゼロ和ゲーム　支配可解　進化安定均衡

1. 研究開始当初の背景

経済学および関連する諸科学において，複数個人間の相互作用を分析する際の共通言語としてゲーム理論は定着しつつある．しかしながら，その基礎には未だ解決の待たれる諸問題が横たわっている．そのような問題として，均衡の安定性と均衡選択がある．**均衡の安定性**とは，個々のプレイヤーたちがどのような形で戦略を選ぶとき，その結果として（ナッシュ）均衡に到達するかを問題とする．**均衡に至るメカニズムの探求**といってもよい．そのようなメカニズムとして，様々な戦略調整過程が考察されてきた．ゲーム理論の基本的な概念用具の一つである，**「支配される戦略」**（以下，被支配戦略）**の逐次的削除** (iterated elimination of dominated strategies) も，そのようなメカニズムの例である．他方，ゲームは性質を異にする複数の（ナッシュ）均衡を持つ場合がある．これら均衡は（パレート）効率性や安定性において異なる性質を持つ．したがって，特に応用研究や厚生分析において確定した結論を得るために，複数あるうちのどの均衡が最も実現しやすいと考えられるかが重要となる．この問いに答えようとする試みを**均衡選択**理論という．

これらの問題には様々な接近が試みられているが，本研究はその一つである**確率進化**に注目する．確率進化モデルは，いわゆる「限定合理的」なプレイヤーによるノイズを伴う戦略調整過程を通じてひとつの均衡が**確率安定**なものとして浮かび上がる様子を，マルコフ連鎖の定常分布を用いて解明するものである．これは，安定性の問題と均衡選択の問題を一挙に考察することを可能とする，強力な手法である．

従来の代表的な確率進化モデルを，二つの軸からおおまかに整理しよう．第一の軸は戦略調整過程を定める行動原理であり，最適反応モデルか模倣モデルのいずれかに大別できる．第二の軸は戦略を調整するプレイヤーが参照する他者の戦略分布の時間幅であり，今期の戦略が直前の期の戦略分布に対して反応する場合と，直近 T 期間（T≥ 2）の分布に対し反応する場合とがある．前者を 1-記憶モデル，後者を T-記憶モデルという．例えば 1-記憶最適反応モデルの先駆である [1] では，ある 2 人ゲームが多人数母集団からのランダム 2 人マッチングにより多数回プレイされる状況が，ひとつの期となる．各期の状態は母集団のうち A をとるプレイヤーの割合である．プレイされるゲームが図 1 の G であって，今期の状態が 1/2 であるとすると，ノイズのない最適反応モデルでは次期の選択は A となるが，1-記憶模倣モデル（[2]）では B となる．T-記憶最適反応モデルの代表例である [3] では，あるゲームが各期プレイされ，プレイヤーは直近 T 期間の中からランダムに抽出された経験分布に対し最適に反応する．模倣モデルの場合では，直近の経験分布において最も平均利得の高い戦略が次期に採用される．T-記憶模倣モデルとして [4] がある．

	A	B
A	$7,7$	$8,0$
B	$0,8$	$9,9$

図 1: 協調ゲーム G

	最適反応	模倣
1-記憶	リスク優位均衡 [1]	大域進化安定均衡 [2]
T-記憶	リスク優位均衡 [3]	パレート優位均衡 [4]

図 2: 2×2 協調ゲームの均衡選択

ノイズが伴う場合，これら様々な調整過程は異なった均衡選択の結果を導く．プレイされるゲームが 2×2 協調ゲームの場合の結果をまとめると，図 2 となる．ここでリスク優位均衡とは，他者の選択が 50 : 50 の場合の最適反応からなる均衡，パレート優位均衡とは他の戦略組をパレート支配する均衡である．大域進化安定均衡とは，全員がある戦略をとっている状態であって，そこからある離脱者が出たときの離脱者の利得が，離脱を被った者の利得を下回るものである（[5]）．

これらの均衡概念のいずれについても，他のいずれかを含意することはない．ゲーム G においては，(A, A) はリスク優位均衡かつ大域進化安定均衡であり，(B, B) がパレート優位均衡である．よって，確率安定均衡は T-記憶模倣モデルでは (B, B)，他のモデルでは (A, A) となる．より一般のゲームにおいては，選択される均衡のモデル設定への依存度はさらに強まる．n 人協調ゲーム $(n \geq 3)$ においては，最適反応調整であっても，1-記憶モデルと T-記憶モデルでは異なる状態が確率安定となりうることが [6] により示されている．

[1] Kandori, M., G. Mailath, and R. Rob, "Learning, mutation and long-run equilibria in games," *Econometrica*, Vol.61, 29-56, 1993.

[2] Alos-Ferrer, C. and A. Ania, "The evolutionary stability of perfectly competitive behavior," *Economic Theory*, Vo.26, p.497–516, 2005.

[3] Young, P.H., "The evolution of conventions," *Econometrica*, Vol.61, 57-84, 1993.

[4] Josephson, J. and A. Matros, "Stochastic imitation in finite games," *Games and Economic Behavior*, Vol.49, p.244–259, 2004.

[5] Schaffer, M., "Evolutionarily stable strategies for a finite population and a variable contest size," *Journal of Theoretical Biology*, Vol.132, p.469–478, 1988.

[6] Maruta, T. and A. Okada, "Stochastically stable equilibria in n-person binary coordination games," *Mathematical Social Sciences*, Vol.63, p.31–42, 2012.

2. 研究の目的

これらの錯綜する既存の諸結果を受け，本研究はあらたな接近法を提案する．最適反応にせよ模倣にせよ，既存のモデルは**すべての**プレイヤーが**同一の行動原理**に従って戦略を改訂してゆくと想定している．これに対し，最適反応するプレイヤーと模倣するプレイヤーが混在するという，**混成動学** (hybrid play) を本研究は考察する．その意義として，次の 2 点が挙げられる．第 1 に，その経験的妥当性である．現実の社会を構成する人々の中には，自らの置かれている戦略的環境を熟知したうえで戦略の選択を行う者もいる一方，他者の成功体験のみを参考にする者もいると考えられることから，既存の調整過程に比べ，混成動学はよりよい現実の近似となっていると考えられる．第 2 に，理論的含意である．すべてのプレイヤーが同一の行動原理にしたがった場合に得られる結果が，極少数の異なる行動原理を持つプレイヤーを導入することにより崩れることがあれば，前者の結果は頑健ではない．すなわち，混成動学の考察は既存の結果の頑健性の検討となる．

3. 研究の方法

混成動学は既存モデルの一般化であり，解析には相当な困難が予想される．したがって，複数の性質を異にする均衡を持つような複雑な協調ゲームからその考察を始めるのは研究戦略の観点から効率的ではない可能性がある．また，第 1 節で述べた大域進化安定均衡は，一般にはナッシュ均衡とは限らない．両者の関係は，静学の範囲においても確定した結論は得られていない．これらの点に鑑み，予備的考察として，一意の（unique な）ナッシュ均衡を持つゲームのクラスの再検討，およびそのもとでの進化安定均衡についての静学的考察から研究に着手した．

この静学的考察は，予想外の結果を生んだ．すなわち，ナッシュ均衡と進化安定均衡が一致するゲームの特徴づけ，および，均衡の一意性の一般化である交換可能性（interchangeability, [7]）を持つゲームの考察が，新たなゲームのクラスの発見につながったのである．**対可解ゲーム** (pairwise solvable game) と名付けられたこのクラスを構成するゲームは，著しい性質を持つことが判明した．注目すべき論点は広範囲にわたり，先行研究を改良するもののみならず，まったく新しい結果も得られた．特に，安定性に対する伝統的な接近の一つである被支配戦略の逐次削除について，新たな発見が得られたことは特筆に値する．このような形で研究が進展した結果，全研究期間が対可解ゲームの考察に費やされることとなった．混成動学の研究は未完であるが，対可解ゲームの考察が今後の研究の進展に資することは言うまでもない．

[7] Nash, J. (1951), "Non-cooperative games," *Annals of Mathematics*, **54**, 286–295.

4. 研究成果

混成動学の予備的考察が大きく展開し，対可解ゲームの研究に結実した．対可解ゲームについての論考 [8] が，本研究の成果である．現在，国際査読制学術雑誌への投稿準備中である．以下，その概略を述べる．

まず始めに，2 人 2 戦略対称ゼロ和ゲームを考えよう．対称性およびゼロ和性から，このクラスに属するゲームはひとつのパラメタ a により，図 3 の G_1 のように定まる．$a > 0$ のとき，戦略 B は戦略 A を支配する．$a < 0$ であれば，戦略 A は戦略 B を支配する．$a = 0$ ならば，両戦略は同値である．

	A	B
A	$0, 0$	$-a, a$
B	$a, -a$	$0, 0$

図 3: ゼロ和ゲーム G_1

よって，任意の戦略集合を持つ 2 人対称ゼロ和ゲームにおいて，次の性質が成り立つ：

(PS) 戦略集合から任意に二つの戦略を選び，それらの定める 2 人 2 戦略対称ゲームを考える．そのようなゲームすべてにおいて，二つの戦略のうち一方が他方を支配するか，あるいは両戦略は同値である．

この性質を用いて，次のように定義する．

定義 任意の戦略集合を持つ 2 人対称ゲーム G を考える．G が**対可解** (pairwise solvable) であるとは，条件 (PS) が成り立つことをいう．

定義より，2 人対称ゼロ和ゲームは対可解ゲームである．したがって，例えば Hotelling の選挙モデル（[9]）（価格競争を含まない立地競争モデル）は対可解である．これにとどまらず，対可解ゲームの適用範囲はゼロ和ゲームを大きく超え，応用上重要な様々なゲームを含む．例えば，Tullock 流のレント獲得 (rent-seeking) ゲーム（[10]）を考える．2 人のプレイヤーがそれぞれ x, y という努力水準を投下する．費用は $c(\cdot)$ である．努力水準の組 (x, y) に応じ，確率 $p(x, y)$ で第 1 プレイヤーが「勝者」となり，価値 $V > 0$ のレントを獲得する．確率 $1 - p(x, y)$ で第 2 プレイヤーが V を得る．利得関数は $u(x, y) = p(x, y)V - c(x)$ であり，$p(x, y)$ は $p(x, y) + p(y, x) = 1$ なる対称な確率関数，特に $p(x, x) = 1/2$ である．簡単な計算より，

$$\begin{aligned} u(x,x) - u(y,x) &= \left(p(x,y) - \frac{1}{2}\right)V + c(y) - c(x) \\ &= u(x,y) - u(y,y) \end{aligned}$$

と確認できる．すなわち，レント獲得ゲームは対可解である．一般に，対称確率関数 $p(x, y)$，費用 $c(x)$，および外部性 $e(y)$ とし，$u(x, y) = p(x, y)V + p(y, x)W - c(x) + e(y)$ と表されるゲームは対可解である．例えば，Lazear and Rosen（[11]）の rank-order tournament ゲームも対可解である．

対可解ゲームの一般的性質について，以下が得られた．

(1) 交換可能性. 対可解ゲームの（ナッシュ）均衡集合は交換可能 (interchangeable, [7]) である．交換可能性とは，ゼロ和ゲームにおけるミニマックス定理の一部を抽出したものであり，一意均衡の一般化である．この結果より，たとえ複数均衡が存在する場合でも，対可解ゲームにおいては「協調の失敗」(coordination failure) が起こらないことが導かれる．すなわち，均衡選択の問題は発生しないと考えられる．

(2) 均衡の存在の特徴づけ. 対可解ゲームは，均衡をもつとは限らない．したがって，均衡存在の問題が重要となる．そこで，戦略集合が全順序集合であり，利得関数が自己戦略について対角準凹である対可解ゲームに注目した．上に挙げた応用上重要であるゲームの戦略集合は，すべて全順序集合である．また対角準凹性は，均衡存在の分析において標準的な準凹条件をさらに弱めた仮定である．この条件下で，均衡の存在の必要十分条件が得られた．またこの結果から，戦略集合が実数直線の部分集合である場合について，いくつかの存在定理を導いた．その応用として，ホテリングの選挙モデルは，投票者選好分布の台（support）が非有

界の場合を含み，対角準凹のもとで均衡を持つことを示した．

(3) 支配可解性．対角準凹性条件を持つ**有限**対可解ゲームにおいて，ある戦略組が均衡であるための必要十分条件は，それが被支配戦略の逐次削除 (以下，IEDS) を経て最後まで残存することであることが示された．よって，対角準凹有限対可解ゲームは支配可解 (dominance solvable, [12]) であり，ホテリング選挙モデル，レント獲得ゲーム，トーナメントゲームなどの離散モデルはすべて，対角準凹条件のもと，被支配戦略の逐次削除により均衡に到達する．

(4) 進化安定均衡との関連．一般に，ある対称ゲームの進化安定均衡はそのゲームに付随する相対利得ゲームのナッシュ均衡であることが知られている．対称ゲームの相対利得ゲームは，対称ゼロ和ゲームであり，したがって対可解である．よって，(2) で得られたナッシュ均衡存在定理は，対可解ゲームとその相対利得ゲームの双方に適用可能である．この議論により，ナッシュ均衡と進化安定均衡をともに持つ対可解ゲームのクラスを特定した．さらには，両者の厚生比較について確定した結論を得た．すなわち，対可解ゲームにおけるナッシュ均衡は進化安定均衡をパレート支配する．これは，進化安定均衡の背後に想定される「意地悪行動」(spiteful behavior) が，パレート劣位な状態に帰結するという直観を精緻化したものである．

このように，対可解ゲームは応用上重要なゲームを多く包摂するのみならず，著しい理論的性質を持つ．中でも，IEDS による可解性，すなわち支配可解性が重要である．ゲーム理論の入口とも言うべき「囚人のジレンマ」の考察からもわかるように，IEDS は最も基礎的かつ初等的な均衡に至るメカニズムであり，それによって均衡プレイが正当化されるゲームのクラスを特定してゆくことは，「囚人のジレンマ」分析のもつ明晰さをより広い範囲に拡大してゆくことに他ならない．これは，冒頭に述べた均衡の安定性問題への貢献となる．実際，従来も教科書レベルで IEDS の実例としてホテリング・モデルが紹介されることはあったものの，それらが単なる「数値例」ではなく，一般的な結果がその背景にあることは明確にされていなかった．レント獲得ゲームやトーナメント・ゲームについては，IEDS による可解性は全く新しい結果である．これら応用上重要なゲームにおいて，IEDS という初等的なメカニズムで均衡プレイを説明してゆくことは，均衡の基礎理論のみならず，ゲーム理論の応用・教育，ひいてはその行動・実験経済学的吟味という観点からも重要である．

[8] Iimura, Takuya, Toshimasa Maruta, Takahiro Watanabe (2016) "Two-person pairwise solvable games," Population Research Institute Working paper No.2016–02, Nihon-University.

[9] Hotelling, H. (1929), "Stability in competition", *Economic Journal*, **39**, 41–57.

[10] Tullock, G. (1980), "Efficient rent-seeking," in J.M. Buchanan et al. (Eds), *Towards a Theory of the Rent Seeking Society* (pp.97-112), College Station, Texas A&M University Press.

[11] Lazear, E.P. and S. Rosen (1981), "Rank-order tournaments as optimum labor contracts," *Journal of Political Economy*, **89**, 841–864.

[12] Moulin, H. (1979), "Dominance solvable voting schemes," *Econometrica* **47**, 1337–1351.

5. 主な発表論文等

[学会発表]　（計 3 件）（すべて研究代表者による口頭発表.）

(1) Maruta, Toshimasa, "Two-person pairwise solvable games," Games 2016, 5th World Congress of the Game Theory Society (Maastricht University, The Netherlands), 2016 年 7 月 26 日.

(2) Maruta, Toshimasa, "Two-person pairwise solvable games," SING12, 12th European Meeting on Game Theory (University of Southern Denmark, Odense, Denmark), 2016 年 7 月 11 日.

(3) Maruta, Toshimasa, "Two-person pairwise solvable games," UECE Lisbon Meetings: Game Theory and Applications (ISEG/Technical University of Lisbon, Portugal), 2015 年 10 月 5 日.

[その他]（計 1 件）（研究代表者所属機関のワーキング・ペーパー：http://www.nihon-u.ac.jp/research/institute/population/nupri/publications.html）

Iimura, Takuya, Toshimasa Maruta, Takahiro Watanabe (2016) "Two-person pairwise solvable games," Population Research Institute Working paper No.2016–02, Nihon-University.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

丸田　利昌 (MARUTA, Toshimasa)
日本大学・総合科学研究所・教授
研究者番号: 60295730