様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 5 月 22 日現在

機関番号：55301
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：26381244

研究課題名（和文）イノベーターの育成を目指した新しい数学教育法の研究

研究課題名（英文）Study on Mathematics Education Method for Nurturing Innovators

研究代表者
松田　修（MATSUDA, OSAMU）

津山工業高等専門学校・その他部局等・教授

研究者番号：60342549

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は，イノベーターの育成を目指した数学教育指導法を研究することである。我々は，数学が持つ自由な発想を数学教育指導法に利用することを目的とする。数学の自由な発想は学生達に新しいアイディアをもたらし，そして問題発見能力を高める。したがって，我々は数学の自由な発想と学生達がどのように数学研究に取りかかるべきかを教えなければならない。ヒントは数論の未解決問題の中にあると考えている。そこで我々は未解決問題を鑑賞するためのテキストを作り，そして数学研究の最初のステップとしてこのテキストを用いた。この研究において，このテキストを用いた教授法は学生達の問題発見能力を高めることが分かった。

研究成果の概要（英文）：Our purpose is to study mathematics education methods for nurturing innovators. We aim to utilize Free-Thinking in mathematics as a method of teaching. Free-Thinking in mathematics encourages students to think of new ideas and it improves their problem discovery ability. So we have to teach Free-Thinking in mathematics, and we have to teach how a student goes about doing research in mathematics. We think a hint is in unsolved problems in number theory. From this, we made a teaching text to appreciate unsolved problems, and used this text as a first step of research in mathematics. We found that the teaching method using this text improves students’ problem discovery ability.

研究分野：数学教育

キーワード：数学教育法　自由研究　課題設定能力　発想力　テーマ設定　未解決問題

１．研究開始当初の背景

高校生を対象とした世界最大の科学コンテストが,毎年インテル国際学生科学フェア(Intel International Science and Engineering Fair,　Intel ISEF)という名称で開催されている。これは1950年から始まり，現在，世界約70の国や地域から1,500人以上の高校生が集まり,科学に関する自由研究を競うコンテストである。日本は，1958年から出場しているが，国内大会を勝ち抜き，数学部門で出場したのは最近の2010年，2011年，2013年の3回だけである。しかし，参加は果たしたものの日本数学の自由研究は未だ評価されていない。

Intel ISEFは次世代のイノベーターの育成を目指して行われている大会である。このことを考えると，現在の日本の数学教育にはイノベーションという視点が足りないことを感じずにいられない。そうはいっても，この視点に関して,どのような教育指導法があるのかさえわからないのが今の日本の数学教育者の現状であろう。

申請者はこれを意識した数学教育を2006年頃から展開してきた。Intel ISEFのための日本予選であるJSEC（Japan Science and Engineering Challenge）という大会が数学を受け入れているというのを知ったのもその頃である。2006年からほぼ毎年,数学研究に関して最終選考会に学生が出場するよう指導し,当研究室はJSECの最終選考会に関しては最多出場である。そして今年度（2013年度）５月にはIntel ISEFへの出場も果たした。 これまで行ってきた指導は,学生達の発想が得られる良いテーマを与え，その後，学生達の発想をどう育て展開していくかについて,思考錯誤で行ってきた。そして，JSECとISEFの一般的指導法の研究の中から学生達の研究のモチベーションを高める統一的な視点があることに気がついた。

さて，この10年間行ってきたイノベーターの育成を意識した数学教育指導の中で，特に納得させられたことは，発想力は知識力（いわゆる従来の学力）から独立したものであるということである。このことは，知識力がないために数学的能力がないとされてきた学生の中にも発想力に富んだ別な意味の数学力を持つ学生を発掘できることを意味する。そして，発想力と知識力のある学生たちを一つのチームとして組ませる助け合いの中から学生達の能力はより大きくなる。私見ではあるが，次世代の日本の教育をより高い水準に上げることを目指すなら，発想力を育成し評価する教育が必要であり，そのためには，発想力に関する指導法の研究が最重要であると考える。しかしこれまで，発想力は個人のものとされ，直接，教育できるものではないとされてきたのではないだろうか。このようなことから，イノベーターの育成を目指した新しい数学教育指導法に関する本研究は，非常に意義があると考える。

２．研究の目的

本研究では，イノベーターの育成を目指した新しい数学教育指導法に関する研究を行う。この研究は，数学が本来持っている自由性という根本的な特性を教育的指導法に活かすことを目指すものである。申請者は，特に，新しい発想力の育成という視点が日本の教育全般に不足していると考えている。その理由については，研究の背景でも述べるが，高校生の科学コンテスト世界大会で日本があまり評価されていない点からも伺える。申請者は，イノベーターの育成のための具体的な方策として，数学における未解決問題を教材とする案を持っている。未解決問題は，素人が分かるレベルにおいても数多い。しかし提案理由は，未解決問題を解くという方向にチャレンジさせるというところにはない。そうではなく，未解決問題の問題としての魅力や意味を感じ取り，その問題をヒントに，例えば，まだだれも提示していないオリジナルで魅力ある問題を自由に発想するといった，学生自らが主体的にイメージした新しい問題や，理論へと発展させることができるものとして捉えている。本研究では，具体的な未解決問題からどのような発想や思考が得られるか，その詳細なデータの分析から，一般の数学の授業でも扱えるイノベーション開発基礎教材としての方向性を提示する。

３．研究の方法

研究の目的は，イノベーターの育成のための教材開発である。その具体的方法としては，未解決問題を用いた学習教材を開発する。そのために，現代の学生のモチベーションに主眼をおいた数学的な好みに関するデータをとり，彼らの思考パターンを抽出する作業を行う。その思考パターンのデータをもとに，未解決問題を用いた学習教材開発を進めていく。

４．研究成果

本研究では，イノベーターの育成のための指導法としてもっと重要なものは探究テーマの設定であると結論づけた。そして，この点に関して本研究で得られた指導法は，未解決問題の鑑賞，仮のテーマの設定というキーワードから，本格的な探究テーマ設定へと発展させるために，（作業０）ウォーミングアップ，（作業１）ホップ，（作業２）ステップ，（作業３）ジャンプといった４つの作業の流れを学生に実行させることであるとした。より具体的に述べると以下である。

（作業０）ウォーミングアップ：これは，既知問題のグループ鑑賞を指す。その具体的な方法は，メンバーそれぞれが面白いと思える未解決問題や簡単な数学の理論を見つけてきて，それを紹介し合い，それをもとにどういった点が面白いのか，どういった展開が考えられるかなどを，自由な視点で議論させる作業を指す。

（作業１）ホップ：これは，既知問題のグループ鑑賞の中から探究活動ができそうな仮のテーマを決めようとする作業を指す。

（作業２）ステップ：仮のテーマをもとに，そのテーマのためのデータの収集方法を考え，収集活動を開始する期間である。同時に，得られたデータから考えられるいろいろな法則性を列挙してみる。

（作業３）ジャンプ：仮の探究テーマがより発展していくような意味ある仮説を立てる作業である。

ジャンプの期間で立てられた仮説により，探究テーマが発展していく可能性が見えてきたならば，その瞬間に探究テーマはほぼ確定したと考えてよいであろう。しかし，（作業０）→（作業１）→（作業２）→（作業３）という流れを１回だけ実行したからといって，意味ある仮説が得られるとは限らない。むしろそうでない場合が普通である。したがって，このような場合は，再度（作業１）ホップの状態に戻し，再度，３つの作業（作業１）→（作業２）→（作業３）を実行させる。そして，これを何回か繰り返すことが，意味ある仮説が立ち，着地である探究テーマの決定に繋がるものと考えている。

しかし，探究テーマを確定するまでには，かなり多くの時間を要することになる。教育機関の環境によっても異なると思うが，週１回の探究活動の時間がとれたと想定して，探究テーマが確定するまでに少なくとも１ヶ月（４回）を要する。ともすると，半期を費やしてしまうこともある。実際，以下に述べる事例３は，数学クラブという週２回集まるクラブ活動で，高専１年生の女子学生が行ったものであるが，連分数からフラクタル連分数という新しい数学的概念を見つけ，フラクタル連分数という探究テーマ[Ma2]を確定させるまで，半年以上の時間を費やしている。しかしこの研究はその後３年間継続された。そして，大学生の科学研究の大会であるサイエンス・インカレにファイナリストとして出場することもできた。

探究テーマを決定していく作業そのものも探究活動であると考える。そしてそれは非常に意義ある教育活動である。通常の数学の授業においては，教科書の問題の，しかも答えのある問題しか扱わないため，数学を研究することにピンとこない学生も多い。そこには課題設定に関する指導は含まれていない。しかし，例えば数論などの未解決問題集[Ri]などを鑑賞してみれば，まだまだ証明されていない数学の問題が山ほどあることに気付かされる。そのとき，それを解決してみようと働きかけるのでなく，何故，その問題が提示されているかなどの意味を深く考えさせてみるのである。そうすれば，そこからだれも思いつかなかったような新しいタイプの問題が設定されたりもする。その瞬間に，学生達は数学をとても楽しいものだと思い興奮する。このように，探究テーマを決定していくという作業は，数学の奥深さと神秘性を満喫できるという学びであると考える。

以下に，分析に使った未解決問題から仮の研究テーマの作成事例を紹介する。

（事例 1） 紹介された既知問題：ファレイ数列（2013 年度）

既知問題の内容：ファレイ数列の理論とは，2 つの既約分数 a/b と c/d から操作 $(a+c)/(b+d)$を行い，新しい既約分数を作っていくもので，集合｛$0/1,\ 1/1$｝から，上の操作によって，集合 $\{0/1,\ 1/2,\ 1/1\}$ が得られ，得られた集合に再び上の操作を行うことによって，集合 $\{0/1,\ 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 1/1\}$ が得られ，これを繰り返すことによって，全ての既約分数が得られるというものである。さらに，ファレイ数列は，フォードの円群と呼ばれる規則的に並んだ大きさの異なる円の集合にも関係がある。

議論 1 a. a/bを既約分数と見ないで，(a,b)という数ベクトルと考えると，上の操作は既約な平面ベクトル同士の足し算に見える。

議論 1b. ファレイ数列を平面ベクトルの列と見ることで，空間の既約な整数からなるベクトルの理論へと発展させるのではないだろうか。

議論 1c. もし，空間の既約な整数からなるベクトルの理論ができれば，それを，平面でのフォードの円群に対して，は球群みたいなものと関係づけることもできるのだろうか。

仮の探究テーマ：ファレイ数列の理論を高次元化すること[Ak]。

（事例 2） 紹介された既知問題：リーマン・ゼータ関数とライプニッツの調和三角形について（2014 年度）

既知問題の内容：リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ は，$\zeta(s)=1+1/2^s+1/3^s+1/4^s+\cdots$ のことである。不思議なことであるが，これに関する本を見て面白いと思ったことは，$\zeta(-1)=1+2+3+4+\cdots=-1/12$ や $\zeta(-2)=1+2^2+3^2+4^2+\cdots=0$ といったように，発散しているはずの $\zeta(-n)$ の値が求められているということである。ところで，ライプニッツの調和三角形は，そこに並んだ分数の無限級数列の値が求まるしくみになっている。これは，$\zeta(s)$と関係があるように見える。

議論 2a. ライプニッツの調和三角形は，$\zeta(s)$ と関係があるように見える。

議論 2b. ライプニッツの調和三角形に表れる分数$1/a$の分母を$1/a^s$として，そのようにして得られる分数の三角形を$R(s)$ と書くことにすると，ライプニッツの調和三角形は$R(1)$を意味する。これから，$R(2), R(-1), R(-2)$などの研究ができるのではないだろうか。

議論 2c. それなら，パスカル三角形においてもパスカル三角形に表れる全ての数を指数化して$P(s)$を作れば，同じような研究ができるのではないか。

仮の探究テーマ：$R(2), R(-1), R(-2)$などの値を計算すること。

（事例 3） 紹介された既知問題：連分数（2011 年度）

既知問題の内容：連分数の作り方を電卓を使って紹介。平方根の正則連分数というものに現れる数列にはいつも周期性がある。

議論 3a. 平方根の正則連分数にはある種の周期性が見られる。n が 3 以上の n 乗根 $\sqrt[n]{D}$ の場合に，同様な観点からは周期性は存在しない。連分数の理論はそういうものだというけれど，何か不満を感じる。

議論 3b. 立方根の連分数的なもので周期性があるものを構成することはできないのだろうか。

議論 3c. もし，立方根の連分数的なもので周期性あるものが構成できれば，3 以上のn乗根$\sqrt[n]{D}$についても連分数的なもので周期性あるものが研究できるのではないだろうか。

仮の探究テーマ：立方根の連分数的なもので周期性あるものを構成すること[Ma1]。

（事例 4） 紹介された既知問題：コラッツ予想（2011 年度）

既知問題の内容：自然数 n について，もし n が偶数なら $n/2$とし，もし，奇数なら $3n+1$ とする操作を考える。この操作を有限回繰り返すと，どんな自然数も最後には $4-2-1-4$のループに落ち込む。これは未だに証明されていない。

議論 4a. もし n が偶数なら $n/2$とし，もし，奇数なら $5n+1$とする操作にしたらどうだろうか。

議論 4b. 議論 4a で出された考え方は，だれでも思いつくことであるから，n をガウス整数として，その場合どういう操作にしたらよいかを考えた方が面白いのではないだろうか。

議論 4c. ガウス整数でうまくいけば，その他の数の体系にも応用できるのではないだろうか。

仮の探究テーマ：ガウス整数版コラッツ問題を作成すること。

（事例 5） 紹介された既知問題：ピタゴラス数とピタゴラス数を生み出す行列（2011 年度）

既知問題の内容：行列 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$ と原始ピタゴラス数$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$を考える。原始ピタゴラス数$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$を縦ベクトル$\boldsymbol{p}$にして，$\boldsymbol{p}$の$\boldsymbol{G}$による変換$\boldsymbol{Gp}$，その後$\boldsymbol{Gp}$の各成分の絶対値をとる操作を考える。このとき，どんな原始ピタゴラス数も有限回のこの操作で$\boldsymbol{(3,4,5)}$に変換される。これは，小林[Ko]に紹介された1980 年代の理論である。

議論 5a. コラッツ問題のガウス整数版が考えられるなら，この理論の複素ピタゴラス数版もできそうな気がする。

議論 5b. そのためには，複素ピタゴラス数とは何かを考えなければならない。

議論 5c. ピタゴラス数$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ではなくて，他の性質を満たす$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ではどうなるのか考えることは面白いと思う。たとえば，$\boldsymbol{a^2+2b^2=c^2}$などを満たす$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ならどうだろうか。

仮の探究テーマ：複素ピタゴラス数を行列変換を用いて研究すること[Tt]。

参 考 文 献

[Ak] 赤松昌俊，小林祐志，ファレイ数列の高次元化の研究，代数幾何シンポジウム 2013 in 岐阜 報告集，pp.99-110 (2013).

[Ko] ピタゴラス数を生み出す行列のはなし，ベレ出版，小林吹代，(2008).

[Ma1] 丸尾優佳，間庭早紀子，連分数を拡張させたフラクタル連分数に関する研究，津山代数幾何シンポジウム 2012 報告集，pp.212-221 (2013).

[Ma2] 丸尾優佳，間庭早紀子，松田修，連分数を拡張させたフラクタル連分数に関する研究，代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜 報告集，pp.65-77 (2015).

[Tt] 橘智子，複素ピタゴラス数の構造について，津山代数幾何シンポジウム 2012 報告集，pp.202-211 (2013).

[Ri] リチャード・ガイ，一松信，数論における未解決問題集，シュプリンガー・フェアラーク東京，(1983).

未完ではあるが，「課題発見能力のトレーニング 数論の未解決問題からの 発想と発展 ― 鑑賞と問いかけから新たなテーマへ―」をホームページに掲載した。これは，各未解決問題の現状と鑑賞の方法を提示し，これに対して，自由研究のヒントになる問いかけを示したものである。

指導した学生による数学の自由研究の特に秀でた成果は以下である。

（１）Pascal Zeta-Function の研究，中野日向，2015.12 高校生科学技術チャレンジ(JSEC2015) 優等賞

（２）PV number による n 次元ファレイ空間の結晶理論，赤松昌俊，小林祐志，2016. 3 第５回サイエンス・インカレ アンバサダー賞

（３）メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究，桐山翔伍，2016.12 高校生科学技術チャレンジ(JSEC2016) 優等賞

（４）Pascal Zeta-Functions の研究，中野日向， 第６回サイエンス・インカレ・コンソーシアム・DERUKUI 賞

（５）三元整数環のピタゴラス数の分類，矢部佳史，第６回サイエンス・インカレ・ファイナリスト

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

（１）高専生による数学研究の紹介２，倉田久靖，齋藤純一，松田修，間庭早紀子，丸尾優佳，赤松昌俊，小林祐志，宮田雄太，木内安珠，高橋悠進，矢吹康浩，山根映介，岩田寛大，寺本誠司，中村彰吾，柴田孝祐，堀畑佳宏，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.21 No.1，pp.81-106，2015.1

（２）高専生による数学研究の紹介３，松田修，倉田久靖，齋藤純一，竹内彩結実，小牧遼太，越野壮太，小林祐志，赤松昌俊，矢部佳史，西井潤，森中大輔，中野日向，冨永泰佑，眞部広紀，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.22 No.1，pp.125-160，2016.2

（３）数学の探究テーマ設定に関する指導法について，松田修，津山工業高等専門学校紀要，第 57 号，pp.139-144，2016.3

（４）高専生による数学研究の紹介４，松田

修，倉田久靖，堀畑佳宏，古清水大直，小牧遼太，清山大道，石原萌，島津瑠衣，兼田夏芽，矢部佳史，桐山翔伍，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.23 No.1，pp.149-190，2017.3

〔学会発表〕（計１４件）
（１）「探究テーマをどのように設定するか」について，松田修，2015.8 第97回全国算数・数学教育研究（北海道）大会
（２）高専における数学探究の指導法について，松田修，2016.3 2016 年度日本数学会年会（筑波大学），工学系数学基礎教育研究会
（３）PV ナンバーによる n 次元ファレイ空間の研究，小林祐志，赤松昌俊，松田修，2015.8 代数学ミニシンポジウム 2015 in 岐阜
（４）パスカル三角形から作られるゼータ関数の研究，中野日向，松田修，2015.8 代数学ミニシンポジウム 2015 in 岐阜
（５）三元整数環の研究，矢部佳史，西井潤，森中大輔，松田修，2015.8 高専数学教育シンポジウム　―学生の数学研究と交流―（高知大）
（６）PV ナンバーによる n 次元ファレイ空間の研究，小林祐志，赤松昌俊，松田修，2015.8 高専数学教育シンポジウム　―学生の数学研究と交流―（高知大）
（７）パスカル三角形から作られるゼータ関数の研究，中野日向，松田修，2015.8 高専数学教育シンポジウム　―学生の数学研究と交流―（高知大）
（８）数学自由研究の指導法，松田修，2016.8 第98回全国算数・数学教育研究（岐阜）大会
（９）数学自由研究の指導法，松田修，2916.9 高水準の数学的リテラシー研究集会（工学院大学）
（１０）M_p 完全数と M_p 調和数の研究，桐山翔伍，松田修，2016.8 代数学ミニシンポジウム 2016（倉敷公民館）
（１１）ルーロー三角形の研究，加田紘大，圓山夏生，松田修，2016.8 代数学ミニシンポジウム 2016（倉敷公民館）
（１２）ルーロー三角形の研究，加田紘大，圓山夏生，松田修，2016.10 高専数学教育シンポジウム ―学生の数学研究と交流―（米子コンベンションセンター）
（１３）三元整数環のピタゴラス数について　矢部佳史，松田修，2016.10 高専数学教育シンポジウム ―学生の数学研究と交流―（米子コンベンションセンター）
（１４）ルーロー三角形の研究，加田紘大，圓山夏生，松田修，2016.12 津山高専と広尾学園との数学に関する自由研究交流会～Mathematical Christmas～（広尾学園）
（１５）メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究，桐山翔伍，松田修，2016.12 津山高専と広尾学園との数学に関する自由研究交流会～Mathematical Christmas～（広尾学園）

〔その他〕
ホームページ等
課題発見能力のトレーニング 数論の未解決問題からの 発想と発展 ― 鑑賞と問いかけから新たなテーマへ ―
http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathED/unresolved%20problem.pdf

６．研究組織
(1)研究代表者
松田　修（MATSUDA Osamu）
津山工業高等専門学校・教授
研究者番号：60342549

(2)連携研究者
梅野　義雄（UMENO Yoshio）
一関工業高等専門学校・教授
研究者番号：30042211

倉田　久靖（KURATA Hisayasu）
米子工業高等専門学校・教授
研究者番号：60205185

斎藤　純一（SAITO Junichi）
東京都立産業技術高等専門学校・准教授
研究者番号：00469579

長水　壽寛（NAGAMIZU Toshihiro）
福井工業高等専門学校・教授
研究者番号：10259856

柳井　忠（YANAI Tadashi）
新居浜工業高等専門学校・教授
研究者番号：50220174