様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６３９０１２６

研究課題名（和文）偏微分方程式に対する高速な構造保存解法の構築と応用

研究課題名（英文）Construction of efficient structure-preserving methods for partial differential equations and its applications

研究代表者
松尾　宇泰（Matsuo, Takayasu）

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：９０２９３６７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではこれまで知られていた構造保存解法をさらに進化させ，高速かつ実用的な手法に昇華させることを目的とした．本研究を通じて，「不連続Galerkin法に基づく高速な構造保存数値解法の基礎的構築」，「力学系理論に基づく構造保存解法の安定性解析手法の開発」，「動的格子法の導入」，「混合微分を含む偏微分方程式に対する構造保存解法の提案」を行った．以上を通じて，構造保存解法はさらに一段深化した．

研究成果の概要（英文）：This research aims at improving existing structure-preserving methods so that the become more efficient and practical methods for applications. Through this research, we established "efficient structure-preserving methods based on discontinuous Galerkin methods", "an analysis method for structure-preserving methods based on dynamical systems theory", "introduction of moving meshes", and "new structure-preserving methods for partial differential equations with a mixed derivative". Through these findings we gained a new, stronger framework of structure-preserving methods.

研究分野：数値解析

キーワード：数値解析　偏微分方程式　構造保存解法

１．研究開始当初の背景

現代科学・工学の現場では，微分方程式の数値解法は欠かせぬツールであるが，近年，方程式の数理的構造を活用することで汎用解法を遙かに超える専用解法---通称「構造保存数値解法」を構成する試みが盛んに行われている．特に偏微分方程式に対しては，申請者自身による前研究において，有限要素法に基づく新しい構造保存数値解法の原理とそれに関連する基礎技術が得られており，これらは世界的にも有力なアプローチのひとつとみなされている．

２．研究の目的

本研究は，上の流れをさらに加速させ，計算コストのさらなる低減，および安定性担保による実用性向上を目指し，真に有用かつ高速な構造保存解法を構築することを目指す．

３．研究の方法

研究開始時点で，以下の２点に渡り構造保存解法を進化させることを目指した．

(1) 計算量低減手法の開発

構造保存解法は，数学的に筋がよい手法である一方で，問題の非線形性を引き継ぎ，計算スキームが陰的非線形となり計算量が重い欠点があった．本研究では，これを改良するために「主に不連続 Galerkin 法導入の可能性検討による空間方向演算量の低減」，および「時間方向多段緩和による時間方向演算料の低減手法の改良」を課題として研究を行った．

(2) 安定化を保証する手法の開発

上記と連動するが，時間方向多段緩和は，手法としては本課題申請者自身によりすでに提案され，世界的に後続研究もあり知られていたが，緩和の代償として（折角の構造保存解法であるにも関わらず）数値スキームが著しく不安定化する場合があった．これに対して，申請者自身によって，最も簡素な常微分方程式系の場合に，拡大位相空間で安定性解析を行う手法がすでに提案されているが，寄り一般の系で数値スキームがいかなる力学系的性質を持つかは未解明であった．この解明を目指し，高速な構造保存解法の枠組の基礎を構築することを課題として研究を行った．

４．研究成果

(1) 計算量低減手法に関しては，まず，不連続 Galerkin 法に基づいても構造保存解法が構築可能であることを示した．さらに実際に KdV 方程式等，基礎的な方程式に対して数値実験を行い，例えば保存量を厳密に保存したまま不連続 Galerkin スキームが動作することを確認した．図１，２はその結果である（学術論文③より引用）．

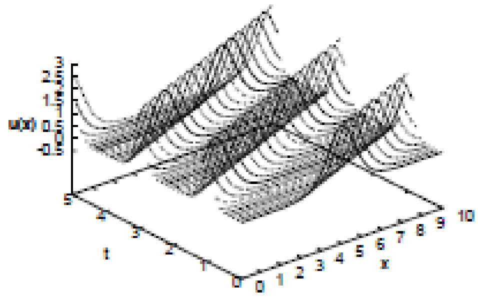


図１．KdV 方程式に対する保存スキーム（１ソリトン解）

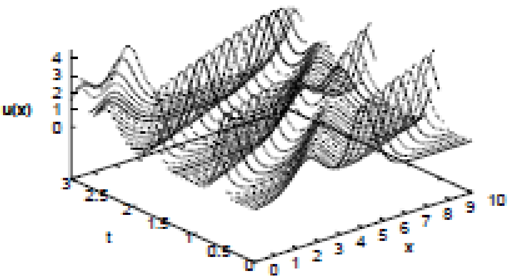


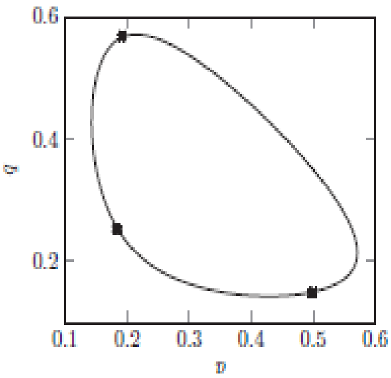
図２．KdV 方程式に対する保存スキーム（２ソリトン解）

さらに，研究開始時点では予想していなかった方向性であるが，可積分系分野で近年自己動的格子解法が研究されていることを参考に，動的格子法の側面を持つ構造保存解法の研究も展開した．その結果，まだ特定の方程式に限られるが，厳密に保存量を保つ動的格子法スキームが構成できることを示した．さらに，実際に特異に近い解に対して，そのようなスキームが（特異点の近くに自動的に格子を集中させる効果により）良好に動作することも確かめた．

(2) 時間方向の安定性解析に関しては，数値解法の力学系理論的解析の一環として，可変時間刻みスキームを力学系と見なす場合に必要となる，可変時間刻み Lyapunov 系に対する Lyapunov 理論を新たに構築した．時間連続の場合，および離散でも時間刻みが固定の場合には（単純な離散力学系として）Lyapunov 理論が知られていたが，可変時間刻みの場合には世界的に未知であり，本研究でこの点が史上初めて明らかになった．これは数値解析学だけでなく，力学系分野にも影響を与えうる成果である．

本研究の困難さを示す図を挙げる．わかりやすさのため，エネルギー保存系ではあるが，Lotka-Volterra 系を考える．これは２次元空間上のエネルギー保存系であり，閉曲線上を

運動する．このときエネルギー保存スキームを用い，かつ時間刻み幅 h_1, h_2, h_3 を適切に選択して，この３ステップで厳密に初期点に戻るようにする（ことができる；図３．これと図４は学術論文②から引用）．このとき，数値解は３点の上を運動する．しかしながら全く同じ時間刻みの組を用いながら，順番を入れ替えて数値計算を行うと（図④），今度は数値解は３点上に留まらなくなり，（恐らく）軌道全体を覆うようになる．このように，一般に可変刻みでは（この例で３ステップ幅の時間刻みの合計が一定に保たれているように，素直な条件下であっても）系の漸近挙動は大きく異なることがある．Lyapunov 理論は，Lyapunov 関数の存在する系に対して漸近挙動を担保するものであるが，上記の例が示すように，時間刻み幅が可変な場合には，時間刻み幅のスケジュールに応じて漸近挙動が変わりうる点が困難な点である．



(3)

図３．Lotka-Volterra 系の計算例
（時間刻み h_1, h_2, h_3 の順）

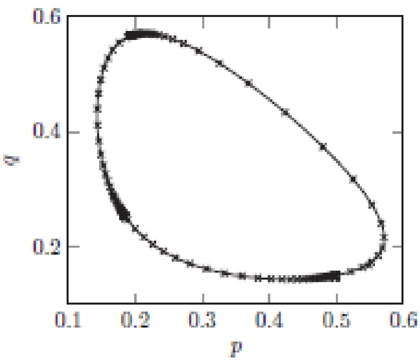


図４．Lotka-Volterra 系の計算例
（時間刻み h_3, h_1, h_2 の順）

上記(1)(2)に加えて，当初予定していなかった方向性であるが，研究期間内に混合微分を持つ方程式（時間・空間微分を同時に持つ項を保つ方程式）が急速に応用数学分野で関心を集めており，その多くが何らかの幾何学的構造を持つことから，本申請課題で目指す新しい構造保存解法の枠組に収めるべきであると考え，基礎的な研究を行った．その結果，混合微分を含む偏微分方程式の標準的な数値解法と思われる手法を発見した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　６件）

① D. Furihata, S. Sato and <u>T. Matsuo</u>, A novel discrete variational derivative method using average-difference methods, JSIAM Letters, Vol.8, 2016, 81-84. DOI: 10.1137/140996719.（査読あり）
② S. Sato, <u>T. Matsuo</u>, H. Suzuki and D. Furihata, A Lyapunov-type theorem for dissipative numerical integrators with adaptive time-stepping, SIAM J. Numer. Anal., Vol.53, 2015, 2505-2518. DOI: 10.1137/140996719. （査読あり）
③Y. Aimoto, <u>T. Matsuo</u> and Y. Miyatake, A local discontinuous Galerkin method based on variational structure, Disc. Cont. Dyn. Sys. Ser. S, Vol.8, 2015, 817-832. DOI: 10.3934/dcdss.2015.8.817. （査読あり）
④Y. Miyatake and <u>T. Matsuo</u>, A note on the adaptive conservative/dissipative discretization for evolutionary partial differential equations, J. Comput. Appl. Math., Vol.22, 2015, 79-87. DOI: 10.1016/j.cam.2014.06.027. （査読あり）
⑤Y. Miyatake and <u>T. Matsuo</u>, A general framework for finding energy dissipative/conservative H^1 Galerkin schemes and their underlying H^1 weak forms for nonlinear evolution equations, BIT, Vol.54, 2014, 1119-1154. DOI: 10.1007/s10543-014-0483-3. （査読あり）
⑥D. Cohen, <u>T. Matsuo</u> and X. Raynaud, A multi-symplectic numerical integrator for the two-component Camassa-Holm equation, J. Nonl. Math. Phys., Vol.21, 2014, 442-453.DOI:10.1080/14029251.2014.936763. （査読あり）

〔学会発表〕（計　４件）

①<u>T. Matsuo</u>, Some recent and open issues on finite-difference based structure-preserving methods, Geometric Numerical Integration and Its Applications (Melbourne, Australia), 2016.
② <u>T. Matsuo</u>, Structure-preserving integration of the Benjamin type equations, SciCADE2015 (Potsdam, Germany), 2015.
③ <u>T. Matsuo</u>, A structure-preserving numerical integrator based on the hodograph transform for the short-pulse equation, ICIAM2015 (Beijing, China), 2015.
④<u>T. Matsuo</u>, Discrete inequalities for

central-difference type operators, FoCM2014 (Montevideo, Urguay), 2014.

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sr3.t.u-tokyo.ac.jp/matsuo/

６．研究組織
(1)研究代表者
松尾 宇泰　(MATSUO, Takayasu)
東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授
研究者番号：90293670

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし