様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ７ 月 ３１ 日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００１

研究課題名（和文）次元の一致と非可換対称関数

研究課題名（英文）Coincidence of dimension and noncommutative symmetric functions

研究代表者
森田　英章（MORITA, Hideaki）

室蘭工業大学・工学研究科・准教授

研究者番号：９０４３５４１２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：　マクドナルド多項式の非可換化の構成では、非可換完全対称関数が基本的である。一方、完全対称関数の生成母関数は、組合せ論的ゼータ函数で与えられている。従って、考察の対象は組合せ論的ゼータ関数の非可換化にその本質がある。この点を理解するため、組合せ論的ゼータ函数がもつ三種の表示、母関数表示・オイラー積表示・行列式表示の関係を見極め、より一般の枠組みのなかで、これらの表示の書き換え条件を補足した。

研究成果の概要（英文）： Noncommutative Macdonald polynomials are considered. The noncommutative complete symmetric functions are fundamental for the problem, and the generating function of (commutative) complete symmetric functions is a combinatorial zeta function. Thus, noncommutative combinatorial eta functions are central objects in this investigation. Constructing the noncommutative combinatorial zeta functions requires a consideration on relations of the generating functional expression, the Euler product expression, and the determinant expression. This problem is settled in a general contect, thai is, in the category of quasi-finite dynamical systems on finite digraphs. We understand that the determinant expression is the strongest among those (the generating functional expression is the weakest), and conditions are obtained for rewriting these three expressions.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：対称群　対称函数　組合せ論的ゼータ函数

１．研究開始当初の背景

グラフゼータ函数や有限力学系のゼータ函数など、組合せ論的対象に対して定義されるゼータ関数は、母関数表示・オイラー積表示・行列式表示の三種の表示をもつ。これらの研究における概ねの方向性は、オイラー積表示もしくは母関数表示でゼータ函数を定義し、それがいつ行列式表示をもつかを問うものである。そして知られている限りにおいて、かならず行列式表示が構成され、さらに母関数表示で定義されたものはオイラー積表示をもつし、オイラー積表示をもつものは母関数表示を持つ。すなわち、組合せ論的な設定上で定義されるゼータ函数に対しては、母関数表示・オイラー積表示・行列式表示の三種の表示が常に揃う現象を見て取ることができる。

２．研究の目的

マクドナルド多項式の非可換化の構成を問題としている。その際に基本となるのは非可換完全対称多項式である。可換完全対称多項式の生成母関数は、グラフゼータでいうところの橋本型行列式表示であらわされる。よって、橋本型行列式表示の非可換化を構成することが問題となる。さらに、単に行列式表示の非可換化を考察するのではなく、グラフゼータや有限力学系ゼータ自体を非可換化すること問題とする。ただ非可換グラフゼータを定義するには、母関数表示かあるいはオイラー積表示を採用し、そこから行列式表示を導くのが自然である。また、母関数表示で定義しても、オイラー積表示で定義しても、いずれの場合も一方から他方を導くことも避けられない。よって、はじめに三種の表示の関係を明確に把握しておくことが研究の効率をあげることになる。

３．研究の方法

グラフゼータや有限力学系ゼータでは、三種の表示が自然に鼎立する。これらの状況を観察しているだけでは、三者鼎立が自然なことなのか、それともなんらかの条件に支えられていることなのか、にわかには判別し難い。そこで、これらを含むより大きなクラスのゼータを考える必要に迫られる。すなわち、グラフゼータと有限力学系ゼータを含み、これら三種の表示が鼎立するとは限らないゼータのクラスを設定し、そのなかで三者の成立条件、もしくは書き換え条件を把握する。

それは有限有向グラフ上定義される擬有限力学系のゼータとして定義される。有限有向グラフに対して、その有向辺を成分とする両側無限列のなす集合は、列の左シフトに対して力学系をなす。この力学系のルエル・ゼータを考えると、それがグラフゼータと有限力学系ゼータを含み、三種の表示が必ずしも鼎立しないゼータのクラスを与えている。

４．研究成果

１）グラフゼータの研究では、閉路に荷重を与えてゼータを定義するものも数多ある。荷重は一般に可換であることが多いが、ここでは行列荷重を考え、同様にグラフゼータを定義し、行列式表示を導いた。これは Watanabe-Fukumizu (2011) の結果をさらに発展させた結果となっている。以上は I.Sato と H. Mitsuhashi との共同研究である。

２）対称群の元を一つ固定すると、それを自己同型とする有限力学系が自然に定まり、母関数表示・オイラー積表示・行列式表示の三種の表示が整うことが知られている。Koyama -Nakajima (2012) は複素競映群の元に対して同様に有限力学系ゼータをオイラー積で定義し、その行列式表示を導いたが、母関数表示が論じられていない。そこで、Y. Hattori との共同研究により、荷重された有限力学系を定義し、その母関数表示を導出した。

グラフや有限力学系などの組合せ論的対象に対して定義されるゼータは、母関数表示・オイラー積表示・行列式表示の三種の表示を持つことが多い。この中で最も強い表示が行列式表示であり、最も弱い表示が母関数表示である。組合せ論的ゼータに関するこれまでの研究においては、母関数表示もしくはオイラー積表示でゼータを定義し、そのぎょ列式表示を導出することが主流の一つを形成していたが、行列式表示が最強の表示であることを考慮すれば、これは研究の自然な流れの一つであった。Koyama-Nakajima においても、オイラー積表示でゼータを定義し、その行列式表示を導出している。ただし、母関数表示は取り上げられていない。母関数表示は三種の表示のなかで最弱であることを考慮すれば、Koyama-Nakajima の L-函数も当然母関数表示を持つはずである。そこで Koyama-Nakajima の L-函数に対して、その母関数表示を与えることが問題となる。しかし、ただ母関数表示をあたえるだけでは不十分である。母関数表示は、対象となっているゼータの力学系的解釈を与えることになる。問題の本質は、ゼータ（L-函数）に対して力学系を適切に設定し、そのルエル・ゼータとして対象となっているゼータを捉えることにある。事実、Koyama-Nakajima の L-函数の場合には、考えている複素競映に対して、有限荷重力学系を構成することができる。そして、Koyama-Nakajima の L-函数はそのルエル・ゼータとして理解することができる。

３）L. Bartholdi は２変数のグラフゼータを導入し、その行列式表示を導いた。その後 I. Sato により３変数のグラフゼータが導入され、ここでも行列式表示が導出されている。ここでは一般有限変数のグラフゼータを導

入し、その行列式表示を導出した。

４）一般にグラフや有限力学系などの組合せ論的対象に対して定義されるゼータ関数は、母関数表示・オイラー積表示・行列式表示の三種の表示をもつ。この点はどの論文でにおいても直接意識されてはいなかったようである。例えば、グラフでは概ねオイラー積表示でゼータを定義し、そこから行列式表示を導出することを目標とする。また力学系では、母関数表示でゼータを定義し、そこから行列式表示を導出することを目標とする。いずれの場合も目標は行列式表示で、その入口が異なる、その程度の認識でとどまり、ことさらこれら三種の表示のすべてを議論のまな板に乗せる機会はなかったようにみえる。ただ、やはりこれら三種の表示が常に鼎立する光景は不思議である以上に、なんらかの根拠がそこにあることを否定することは筋悪としかいいようがない。そして問題は、これら組合せ論的設定上定義されるゼータを包括する、より一般のゼータのカテゴリーを設定し、そのなかで三種の表示の因果関係を明らかにすることである。そして結論は、有限有向グラフ上定義される擬有限力学系のルエル・ゼータがこの問題を考えるに適切なカテゴリーであり、かつ最弱な表示が母関数表示で、最強の表示が行列式表示であることが明確に理解される。さらに、これら三種の表示が鼎立するための条件も明瞭に把握される。そしてこれまで知られていた諸々の組合せ論的ゼータが、この条件を自然な形で満足していることを容易に見て取ることができる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Y. Hattori and H. Morita, Ruelle zeta functions for finite dynamical systems and Koyama-Nakajima's L-functions, Proceedings of the Japan Academy，査読有， 92 (2016), 107-111.

② I. Sato, H. Mitsuhashi and H. Morita, A generalized Bartholdi zeta function for a general graph, Linear and Multilinear Algebra，査読有，64 (2016)，991-1008.

③ H. Mitsuhashi, H. Morita and I. Sato, A matrix-weighted zeta function of a graph, Linear and Multilinear Algenbra，査読有，62 (2014)，114-125.

〔学会発表〕（計１０件）

① 森田英章，有向グラフ上のルエル・ゼータ，軽井沢グラフと解析研究集会、日本大学軽井沢セミナーハウス，２０１７年２月８日.

② 今野紀雄，森田英章，佐藤巖，Grover 行列の trace formula，グラフゼータと量子ウォークの諸相，室蘭工業大学，２０１６年８月２９日.

③ 森田英章，有向グラフ上のルエル・ゼータ，グラフゼータと量子ウォークの諸相，室蘭工業大学，２０１６年８月２９日.

④ 三橋秀生、森田英章，佐藤巖，A new determinant expression for the weighted Bartholdi zeta function of a digraph，日本数学会秋季総合分科会，京都産業大学，２０１５年９月１３日.

⑤ 森田英章，組合せ論的ゼータとその行列式表示，不変性と対称性，鹿児島大学，２０１５年９月６日.

⑥ 三橋秀生、森田英章，佐藤巖，A new determinant expression for the weighted Bartholdi zeta function of a digraph，離散数学とその応用，熊本大学，２０１５年８月２３日.

⑦ 森田英章，組合せ論的ゼータとその行列式表示，Algebraic Lie Thory and Representation Theory 2015，岡山県いこいの村，２０１５年６月５日.

⑧ 森田英章，組合せ論的ゼータの半群表示，日本数学会年会，明治大学，２０１５年３月２３日.

⑨ 森田英章，小山-中島 L-関数の母関数表示，日本数学会年会，明治大学，２０１５年３月２３日.

⑩ 森田英章，組合せ論的ゼータの半群表示，組合せ論的表現論と表現論的組合せ論，京都大学数理解析研究所，２０１４年１０月３１日.

６．研究組織

(1)研究代表者

森田英章（MORITA Hideaki）

室蘭工業大学・工学研究科・准教授

研究者番号：９０４３５４１２