

平成 29 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400003

研究課題名(和文)有限群と格子を用いた球デザインの構成

研究課題名(英文)Constructions of spherical designs using finite groups and lattices

研究代表者

宗政 昭弘 (Munemasa, Akihiro)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：50219862

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：球デザインの構成のヒントとなる、グラフのスペクトルや有限置換群について、様々な角度から研究した。グラフのスペクトルによる特徴付けの反例の構成法として知られるスイッチングの手法を、極めて非自明な適用法を見出すことによって、グラスマングラフのスペクトラルメイトとして有名な例を全く別の方法で構成することに成功した。また、アソシエーション・スキームから得られる球面の有限部分集合の様々な性質について、研究分担者はこれまで得られている結果を拡張した。

研究成果の概要(英文)：In connection with spherical designs, we investigated spectra of graphs and finite permutation groups. We have found a highly nontrivial method of switching for constructing cospectral mates of graphs to give an alternative construction of the twisted Grassmann graphs. Other achievements includes extension of previously known properties of subsets of a sphere derived from association schemes.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：球デザイン グラフ 整数格子 有限群 線形符号

### 1. 研究開始当初の背景

デザイン理論に代数的方法を適用することは、デルサルトによって 1973 年にアソシエーション・スキームという枠組みの中で定式化され、それまで知られていた多くの結果、特に限界式が統一的な方法で導かれることが示された。この方法により、ハミングアソシエーション・スキームにおいても符号の限界式を与えているだけでなく、直交配列を同じ枠組みで捉えて限界式を自然に導出できる。さらに、同様の理論がユークリッド空間内の球面上に構築され、球面上の有限部分集合においてもデザインの限界式について、同様の定理が成り立つことを示した。この理論は後に複素射影空間にまで拡張され、量子情報理論においても独立に注目されている問題をも統一的に扱えることが判明している。これらの理論に基づき、1980 年頃から具体例の分類・構成について活発な研究がなされてきている。

### 2. 研究の目的

本研究では、代数的な手法を用いた球デザイン構成と、代数的な手法による球デザインの存在のための必要条件の導出を行う。構成のために用いるのは直交群の有限部分群であり、どのような部分群が適切かどうかは、鏡映群を除いてははっきりとはわかっていない。また、もう一つ構成に有用なのが整数格子であるが、これもユニモジュラー格子を除いてどのような格子が良いデザインを与えるかはよくわかっていない。有限群や格子の具体例を調べて行くことにより、よりよい球デザインを構成することが本研究課題の目標であるが、それとともに存在のための必要条件を導出することにも注意を払い、既存の限界を改良することを目指している。また、同じ問題の離散的な類似である代数的符号理論についても、同様の手法を用いて構成問題及び分類問題の解決を進める。球デザインの特殊な場合である等角直線族とグラフのスペクトルの関係についても、具体例の構成と分類を目的に研究を進める。

### 3. 研究の方法

球面の部分集合とグラフの関係を研究するため、研究分担者には代数計算ソフトウェアを購入してもらい、実験的な計算ができる環境を構築した。また、代数的組合せ論シンポジウムをはじめとする研究集會に研究組織のメンバーが参加し、本研究課題に関連したことを発表することにより問題提起を行い、それに基づき短期目標を設定し次回の打ち合わせまでの間各自持ち帰って研究を進めた。特に、代数的組合せ論を概観する研究集會において、球デザインに関連した行列の構成法を研究分担者の須田氏に発表してもらった。篠原氏は球面上の有限集合の幾何学的な性質、極値集合論的な性質について研究してもらった。三枝崎氏には整数格子のテ-

タ関数の研究をしてもらい、その離散類似である自己双対符号の構成と分類は研究代表者の宗政が担当した。

### 4. 研究成果

(1) 2004 年に発見された、グラスマングラフと同じスペクトルを持ち非同型なグラフが、実は 1982 年に確立されたスイッチングの手法によって構成できることを示した。このスイッチングの手法が適用できるということは極めて非自明であり、その後スイッチングを利用して同じスペクトルを持ち非同型なグラフができることを他の(もっと簡単な)例で示したという研究が多くなされるようになった。

(2) 組合せ論的にも重要である有限体上の既約多項式の構成について、有限群論の基礎理論を用いて知られている定理の別証明を与えるとともに、仮定を弱める一般化に成功した。これを元に、係数に制限をつけた有限体上の既約多項式の存在予想がされる結果となり、有限体上の関数隊の理論を援用することで解決できるのではないかと考えられている。

(3) 球デザインに関連した行列として、サイドル行列、アダマール行列、ウェイング行列などがある。これらの行列の構成と分類について、代数的手法を用いて研究した。これらの行列から得られるアソシエーション・スキームの研究や、逆に、アソシエーション・スキームの隣接行列の一次結合として表される行列の中からこのような特殊な行列を探す方法を研究した。

(4) 整数格子の分類結果を用いて、自己双対符号の分類ができることを示した。整数の剰余環の上の自己双対符号の分類は、ウェイング行列の分類にも応用でき、データベースを作成している。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

A. Munemasa, Godsil-McKay switching and twisted Grassmann graphs, *Designs, Codes and Cryptography*, 84 (2017), 173-179, 査読有

A. Munemasa, Pritta Etriana Putri, Transforming a matrix into a standard form, *Interdisciplinary Information Sciences*, 2017 掲載決定, 査読有, doi:10.4036/iis.2016.S.02

A. Munemasa, H. Nakamura, A note on the Brawley-Carlitz theorem on irreducibility of composed products of polynomials over finite fields,

Lecture Notes in Comp. Sci. 10064 (2017) 84-92, 査読有  
 K. Momihara, M. Shinohara, Distance sets on circles, American mathematical monthly, 124 (2017), 241-254, 査読有  
 G. Greaves, J. Koolen, A. Munemasa, F. Szollosi, Equiangular lines in Euclidean spaces, J. Combin. Theory, Series A 138 (2016), 208-235, 査読有  
 M. Harada, A. Munemasa, On the classification of self-dual  $[20,10,9]$  codes over  $GF(7)$ , Finite Fields and Their Applications, 42 (2016), 57-66, 査読有  
 M. Harada, A. Munemasa, On the classification of self-dual  $Z_k$ -codes II, Interdisciplinary Information Sciences, 17 (2016), 81-85, 査読有  
H. Nozaki, S. Suda, Complex spherical codes with two inner products, European J. Combin. 51 (2016), 511-518, 査読有  
T. Miezaki, H. Nakasora, An upper bound of the value of  $t$  of the support  $t$ -designs of extremal binary doubly even self-dual codes, Designs, Codes and Cryptography 79 (2016), 37-46, 査読有  
 P. Frankl, M. Shinohara, N. Tokushige, Multiply union families in  $N^n$ , European J. Combin. 58 (2016), 66-74, 査読有  
 T. Ikuta, A. Munemasa, Complex Hadamard matrices contained in a Bose-Mesner Special Matrices 3 (2015), 91-110, 査読有  
T. Miezaki, M. Waldherr, Congruences for the Fourier coefficients of the Mathieu mock theta function, J. Number Theory, 148 (2015), 451-462, 査読有

[学会発表](計 29 件)

篠原雅史, 「Few triangle sets」, 直観幾何学 2017, 2017 年 2 月 12 日, 熊本大学(熊本市)  
野崎寛, 「Largest regular multigraphs with three distinct eigenvalues」, Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2016 年 12 月 15 日, Newcatsle (オーストラリア)  
須田庄, 「Association schemes obtained from twin prime powers」, Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2016 年 12

月 14 日, Newcatsle (オーストラリア)  
宗政昭弘, 「Quasi-symmetric 2-(37,9,8) design の非存在」, 実験計画法と符号および関連する組合せ構造, 2016 年 11 月 29 日, 秋保リゾートホテルクレセント(仙台市)  
宗政昭弘, 「Group theoretic aspects of the theory of association schemes」, International Workshop on Algebraic Combinatorics, 2016 年 10 月 29 日, 合肥(中国)  
野崎寛, 「Largest regular digraphs with three eigenvalues」, International Workshop on Algebraic Combinatorics, 2016 年 10 月 29 日, 合肥(中国)  
須田庄, 「Affine resolvable designs and an extension of linked symmetric designs」, International Workshop on Algebraic Combinatorics, 2016 年 10 月 28 日, 合肥(中国)  
篠原雅史, 「少ない非合同三角形を持つ点配置について」, 組合せ論サマーセミナー 2016, 2016 年 8 月 26 日, 下呂市市民会館(岐阜県下呂市)  
宗政昭弘, 「Triply even codes obtained from some graphs and finite geometries」, Graphs and Groups, Spectra and Symmetries, 2016 年 8 月 21 日, Novosibirsk (ロシア)  
篠原雅史, 「Structures of minimal two-distance sets of complete multipartite graphs」, 78th KPPY Combinatorics Workshop, 2016 年 8 月 2 日, 釜山(韓国)  
篠原雅史, 「Few triangle sets」, 第 33 回代数的組合せ論シンポジウム, 2016 年 6 月 23 日, ピアザ淡海(滋賀県大津市)  
野崎寛, 「Maximal  $m$ -distance sets containing the representation of the Hamming graph  $H(n,m)$ 」, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications, 2016 年 5 月 25 日, 京都大学(京都市)  
篠原雅史, 「Maximum Euclidean sets that contain few non-congruent triangles」, 76th KPPY Combinatorics Workshop, 2016 年 4 月 30 日, 釜山(韓国)  
須田庄, 「Unbiased orthogonal designs」, 代数的組合せ論とその周辺, 2016 年 3 月 9 日, 東北大学(仙台市)  
篠原雅史, 「Multiply union families in  $N^n$ 」, Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, 2016 年 1 月 29 日, 釜山(韓国)  
野崎寛, 「On the largest subsets avoiding the diameter of  $(0,1,-1)$ -vectors」, 有限群とその表現,

- 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, 2016年1月7日, 京都大学(京都市)
- 篠原雅史, 「Distance sets and Kneser's theorem」, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, 2016年1月7日, 京都大学(京都市)
- 宗政昭弘, 「Covering radii and shadows of binary self-dual codes」, 代数学と計算, 2015年12月15日, 首都大学東京(東京都八王子市)
- 宗政昭弘, 「Self-orthogonal designs and equitable partitions」, 計算代数システムによる新しい数学の開拓と進展, 2015年9月30日, 京都大学(京都市)
- 宗政昭弘, 「Self-orthogonal designs and equitable partitions」, Algebraic Combinatorics Workshop, 2015年9月20日, 杭州(中国)
- 21 篠原雅史, 「円周上の距離集合について」, 離散数学とその応用研究集会2015, 2015年8月23日, 熊本大学(熊本市)
- 22 須田庄, 「Introduction to complex spherical codes and designs with applications to MUBs and SIC-POVMs」, Systems of Lines: Applications of Algebraic combinatorics, 2015年8月12日, Worcester(アメリカ合衆国)
- 23 須田庄, 「複素球面上の内積集合について」, デザイン、符号、グラフおよびその周辺, 2015年7月9日, 京都大学(京都市)
- 24 三枝崎剛, 「Eisenstein series and E-polynomials」, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, 2014年12月17日, 京都大学(京都市)
- 25 宗政昭弘, 「A parametric family of complex Hadamard matrices」, 実験計画法およびその周辺の組合せ構造, 2014年12月15日, 城崎国際アートセンター(兵庫県豊岡市)
- 26 三枝崎剛, 「Eisenstein polynomials and Zeta polynomials」, Workshop on Galois point and related topics, 2014年9月13日, 滋賀大学大津サテライトプラザ(滋賀県大津市)
- 27 三枝崎剛, 「デザイン理論から見た, 符号、格子及び頂点作用素代数の一つの類似」, デザイン、符号、グラフおよびその周辺, 2014年7月24日, 京都大学(京都市)
- 28 須田庄, 「Q多項式スキーム」, 代数的組合せ論夏の学校, 2014年6月17日, 秋保リゾートホテルクレセント(宮城県仙台市)
- 29 宗政昭弘, 「アソシエーションスキーム

入門」, 代数的組合せ論夏の学校, 2014年6月15日から16日, 秋保リゾートホテルクレセント(宮城県仙台市)

[その他]  
ホームページ等  
<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~munemasa/selfdualcodes.htm>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

宗政 昭弘 (MUNEMASA AKIHIRO)  
東北大学・情報科学研究科・教授  
研究者番号: 50219862

### (2) 研究分担者

須田 庄 (SUDA SHO)  
愛知教育大学・教育学部・講師  
研究者番号: 30710206

三枝崎 剛 (MIEZAKI TSUYOSHI)  
山形大学・地域教育学部・准教授  
研究者番号: 60584068

篠原 雅史 (SHINOHARA MASASHI)  
滋賀大学・教育学部・講師  
研究者番号: 70432903

野崎 寛 (NOZAKI HIROSHI)  
愛知教育大学・教育学部・講師  
研究者番号: 80632778