様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００５

研究課題名（和文）無限次元の代数群とリー代数の構造と表現、および準周期構造への応用の研究

研究課題名（英文）Study on the structures and representations of infinite dimensional algebraic groups and Lie algebras, and applications to quasiperiodic structures

研究代表者
森田　純（MORITA, Jun）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：２０１６６４１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：無限次元代数群であるカッツ・ムーディ群の構造と表現を研究し、群としての単純性について研究を行った。特に階数2のある種のカッツ・ムーディ群の単純性に関して新しい結果を得た。また、局所拡大アフィン・リー代数の分類について研究した。特に、局所アフィン・リー代数の分類問題、極大問題、極小問題を解明した。さらに、準周期配列や非周期文字列に付随する代数構造の研究を行った。特に、その表現構造の応用として得られる不変量の計算アルゴリズムとプログラムの改良を行った。

研究成果の概要（英文）：The structures and representations of Kac-Noody groups as infinite dimensional algebraic groups are studied. In particular, the so-called simplicity problem is studied. In fact, the simplicity of some rank two Kac-Moody groups is established. On the other hand, the classification of locally extended affine Lie algebras is studied. Especially the classification problem, the maximality problem and the minimality problem are studied for locally affine Lie algebras. Furthermore, quasiperiodic and aperiodic structures are studied. And also associated algebraic structures are studied. In particular, using their representations, algorithms and programs are newly refined,

研究分野：Algebra

キーワード：algebraic group　Lie algebra　aperiodic structure

1.　研究開始当初の背景

(1) 有限次元代数群とリー代数の理論は、複素リー群と複素リー代数の理論の代数的一般化・類似化として整備された。20 世紀半ばには、半単純代数群と半単純リー代数の分類も完成した。これらの理論を無限次元化することは簡単ではないが、20 世紀後半になり、その波が訪れてくる。

いわゆる、カッツ・ムーディ理論が登場する。セールの関係式を用いて生成元と基本関係によりリー代数を構成し、そこで表現論を展開し、さらに指数写像を巧みに用いて、対応する群が得られる。これらは、カッツ・ムーディ・リー代数およびカッツ・ムーディ群と呼ばれる。

最初は、単なる無限次元の類似物という位置付けであったが、次第におびただしい種類の応用が、純粋数学の各方面だけではなく数理物理の世界にも及ぶことが発見され、非常に大きな反響を呼ぶこととなった。特に、量子化の話、および頂点作用素代数とも連動して、この分野の大きな発展の原動力となる。

一方で、半単純代数群はシュヴァレー等により、整数環上のスキームとして解釈されてきていたが、それの一般化として、ティッツはカッツ・ムーディ群も整数環上の群関手として構成できることを示し、代数的な定式化に成功した。

さらに、ティッツは体上のカッツ・ムーディ群に彼の建物理論を適用し、幾何学的なアプローチを試み、その帰結として群表示を与えた。これは非常に大きな成果であると言える。

これらの結果を受けて、カッツ・ムーディ群の普遍中心拡大や K_2 群などの議論も可能となり、更なる応用が数多く見つかった。こういう流れの中で、カッツ・ムーディ群の単純性だけは手付かずで残っていた。多くの研究者が興味を持ってはいたが、非常に難しい問題として残されていたのである。

21 世紀になり、単純性への新しいアイデアが登場する。カッツ・ムーディ群を正と負の 2 つの方向に独立に完備化し、それら 2 つの群の直積の中にカッツ・ムーディ群を埋め込み、マルグリス理論の類似を展開しようという試みである。最終的に、これが功を奏して、カプラス-レミは非アフィン型で、階数 3 以上の全ての場合、および階数 2 の一部の場合に、有限体上のカッツ・ムーディ群が（或るマイナーな条件の下で）単純群になることを証明したのである。長年にわたり未解決であった難問に風穴をあけたことになる。

このように、有限体上のカッツ・ムーディ群の単純性の解明が進められている中で、ある種の階数 2 の場合だけ残されていた。そこを解明する必要があった。

(2) 上記のカッツ・ムーディ理論の中で、アフィン型と呼ばれる世界は、様々な意味で特別かつ重要な意味を持っているクラスである。このアフィン型のクラスに属するリー代数はアフィン・リー代数と呼ばれている。

このクラスは余りにも大切で面白いので、一般化がなされている。それが、拡大アフィン・リー代数であり、分類もなされている。そして更なる一般化として、局所拡大アフィン・リー代数も考察され、カッツ予想などの興味深い現象も発見・証明された。局所拡大アフィン・リー代数の中でも、ひときは重要なのは局所アフィン・リー代数である。

この様に、局所拡大アフィン・リー代数の理論が整備される中で、局所アフィン・リー代数の分類の解決が求められてた。

(3) 上記の (1) (2) にある如く、無限次元のリー理論は大きく進歩してきてる。他方で、物質科学における準周期構造の解明や、生命科学における非周期文字列などの解明が急がれてきている。

そういう大きな流れに沿って、新たな数学的なアプローチが求められる中、無限次元リー理論で培った純粋数学における概念を応用し、構造解明を行うことの意味が非常に増してきている現状があった。

そこで、リー理論を駆使して、代数的対象物を構成し、そこで表現論を展開し、テンソル積分解公式などを利用しながら、新たな不変量を定式化する枠組みが考察されてきた。

具体的には、代数的・抽象的な双代数という概念を用いて代数的対象物を構成し、その標準加群を定式化し、それらのテンソル積を考えて、その分解規則を解明している。その公式を利用して不変量を帰納的に定めることができるが、実際の計算では計算機を用いた数式処理を行わねばならず、複雑なアルゴリズムとプログラムを作成することになる。

この様に、準周期配列や非周期文字列に付随する代数構造から得られる不変量を、より正確に素早く厳密に求めるため、アルゴリズムとプログラムの改良が必要とされていた。

２．研究の目的

以下の 3 点を解明する。

(1) 階数 2 のカッツ・ムーディ群の単純性、および関連構造を調べる。

(2) 局所アフィン・リー代数の分類、および関連構造を調べる。

(3) さらにこれらリー理論を用いて準周期・非周期構造、および関連構造を調べる。

３．研究の方法

(1) カッツ・ムーディ群の単純性に関しては、代数的手法に加えて、幾何学的な側面からのアプローチと組み合わせ論的な構造解明を用いる。

(2) また、局所アフィン・リー代数の分類の研究では、無限ルート系とともに局所有限単

純リー代数の理論を用いる。

(3) さらに、これらの無限次元リー理論で培った論理展開を利用して、準周期・非周期構造に対して代数的対象物を構成し、そこで構造論と表現論を構築する。それらを用いることにより、不変量を導出する。それを正確により効率よく得るために、アルゴリズムとプログラムの改良を行う。

４．研究成果

(1) 階数２の一般カルタン行列で、成分にマイナス１が出てこない場合に、対応する随伴型カッツ・ムーディ群が然るべき体の上では単純群となることを示した。これは B.レミ教授との共同研究により導かれた。ここで言う然るべき体とは、有限体の代数閉包に含まれる無限体を意味する。

(2) 次に、局所アフィン・リー代数の分類に関しては、3 つの問題、すなわち分類問題、極大問題、極小問題を解決することができた。すなわち、局所アフィン・リー代数はこれらに限るという分類を完成させた。極大なものが唯一つあること、極小なものがパラメータ付きで無数にあること、一般の場合にはそれらの中間にあるもの全てという形であることが示された。

(3) さらに、準周期・非周期構造に関しては、代数構造に端を発するアルゴリズムとプログラムを見直し、改良し、より厳密に計算の効率化を図ることができた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

Elena Klimenko, Boris Kunyavskii, <u>Jun Morita</u>, Eugene Plotkin.
Word maps in Kac-Moody groups.
Toyama Math. J. 37, 2015, 25 – 53.

<u>Jun Morita</u>, Yoji Yoshii.
Locally loop algebras and locally affine Lie algebras.
J. Algebra, 440, 2015, 379 – 442.

<u>Jun Morita</u>, Bertrand Remy.
Simplicity of some twin tree automorphism groups with trivial commutation relations.
Canad. Math. Bull. 57, 2014, 390 – 400.

〔学会発表〕（計４件）

<u>Jun Morita</u>.
Kac-Moody groups, simple groups and Schur multipliers.
Japan-Korea workshop on Algebra and Combinatorics.
February 9 – 11, 2017.
Kumamoto University, Japan.

<u>Jun Morita</u>.
LTR to Kac-Moody groups.
Summer Seminor on Lie Theory.
August 26 – 27, 2016.
Iwate University, Japan.

<u>Jun Morita</u>.
Tits systems, Kac-Moody groups and their applications.
The 7th International Conference on Representation Theory.
July 18 -- 23, 2016.
Xiamen University, China.

<u>Jun Morita</u>.
Some topics on Kac-Moody groups.
Infinite Dimensional Lie (Super)algebras and Their Representations.
Infinite Dimensional Lie (Super)algebras and their Representations.
University of Isfahan, Iran.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
http://math.tsukuba.ac.jp/~morita

６．研究組織

(1)研究代表者

森田純（MORITA　Jun）
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：20166416

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者
　なし

(4)研究協力者
　なし

付記：
研究分担者、連携研究者、研究協力者はいないが、パリ大学（フランス）のレミ教授、リヨン大学（フランス）のケレンドンク教授、エルランゲン大学（ドイツ）のニーブ教授、ビーレフェルト大学（ドイツ）のバーケ教授、エドモントン大学（カナダ）のムーディ名誉教授に研究経過および研究成果に関してレビューを受けた。