2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月 20 日現在

機関番号：12601
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：26400006

研究課題名（和文）一般化バルマ加群の間の準同型の研究

研究課題名（英文）Study of homomorphisms between generalized Verma modules

研究代表者
松本　久義（MATUMOTO, Hisayosi）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50272597

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：簡約リー代数のスカラー型バルマ加群の間の準同型の分類問題は対応する一般化旗多様体上の直線束の間の同変微分作用素の分類に等価であり、表現論のみならず放物幾何においても重要である。この問題は40年以上の歴史があるがいまだ未解決のままである。本研究においてはこの問題に取り組んだ。研究期間内に得られた成果として特筆されるものは、一般線形リー代数の場合にこの問題を完全に解決したことである。また準同型の存在のための必要条件を導き出すために一般線形リー代数の場合にBorho-Jantzenの結果を使ったが、一般の場合を調べることを念頭において別証明を与えた。

研究成果の概要（英文）：The classification problem of homomorphisms between scalar generalized Verma modules is equivalent to the classification of equivariant differential operators between line bundles over the corresponding generalized flag varieties. It plays an important role in parabolic geometry as well as representation theory. The problem remains unsolve more than 40 years. The principal investigator studied this classification problem.
The principal investigator classified homomorphisms between scalar generalized Verma modules for general linear algebras. He also gives alternative proof of a result of Borho-Jantzen, aiming to generalize it to other reductive Lie algebras.

研究分野：簡約リー群の表現論

キーワード：一般化バルマ加群　ユニタリ表現　半単純リー代数　リー群　微分不変量　退化系列表現　放物幾何

１．研究開始当初の背景

g を複素簡約リー代数、p をその放物型部分代数とする。p の一次元表現から g への誘導表現はスカラー型の一般化された Verma 加群と呼ばれる。スカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型は一般化された旗多様体の上の同変直線束の間の同変微作用素と対応しており、Baston らによって提唱されている一般化された旗多様体をモデルとする、parabolic geometry の観点からも興味深い。p が Borel 部分代数の時が Verma 加群であり、Verma 加群の間の準同型を決定することは Verma, Bernstein, Gelfand, Gelfand によって 1970 年前後あたりから知られている有名な結果がある。(Verma は準同型の存在の十分条件を与え、Bernstein, Gelfand, Gelfand はそれが必要条件になっていることを示した.) 1970 年代に Lepowsky が p が実半単純 Lie 代数の極小放物型部分代数の複素化の場合に Verma の結果を拡張するなど、基本的な結果を幾つか得たが一般には未解決である。

研究代表者は放物型部分代数 p が極大の場合の準同型の分類を完成させたがそこでは 一般の放物型部分代数の場合に ある種の比較定理により p が極大の場合の準同型の存在から準同型の存在が導けることも示していた 。（このような準同型を elementary な準同型と呼ぶ。)そこで問題としては任意のスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型は elementary なものの合成で書けるか? というものが考えられる。この問題が肯定的に解ければ準同型の分類が得られることになる。例えば p が Borel 部分代数の時は、Bernstein-Gelfand-Gelfand の結果はその問題が肯定的であるということに他ならない。まず Soergel の結果より問題は容易に無限小指標が integral な場合に帰着されるのでこのような場合のみ考えればよい。この予想について、研究代表者は strictly normal というクラスの放物型部分代数に対して予想を無限小指標が非特異という条件のもとで肯定的であることを示していた。Bernstein-Gelfand-Gelfand の Borel 部分代数についての結果であるが、その後現れた Beilinson-Bernstein 理論などを踏まえれば旗多様体のシューベルト多様体にバルマ加群が対応することがわかる。そのことよりバルマ加群の間に非自明な準同型が存在するならば対応するシューベルト多様体の間に閉包関係が存在する。特筆されることはこの閉包関係の存在が非自明な準同型が存在することになっているのである。上記の strictly normal case も同様な状況になっている。しかし一般の放物型部分代数に対しては閉包関係は十分条件よりも弱い条件になることが知られている。このことは幾何学的なアプローチをこの問題に対して取るには単に閉包条件だけでなく一般化されたシューベルト多様体の特異性をまともに分析しなければならないということを意味し難しいことになってしまう。しかしながら研究代表者は gl(n,C)の場合に無限小指標が非特異な場合には translation principle を用いた代数的な手法で予想が肯定的なことを示せていた状況であった。

２．研究の目的

有限自由度を持つ連続的な対称性はリー群という数学的対象で記述できる。リー群はほぼ簡約リー群と冪零リー群の組み合わせで理解できる。冪零リー群は可換リー群の組み合わせとして理解であるので、簡約リー群は対称性に置いて非可換な本質的な部分を担っている基本的な対象である。簡約リー代数は簡約リー群の局所的な構造を記述する代数的対象であり、簡約リー群や簡約リー代数の表現論は数学のみならず物理学や化学などに置いて多くの応用を持つ現代数学における大きな分野を形作っている。一般化された Verma 加群の間の準同型の分類はその中で現れた自然な問題であり、表現論内部だけでなく放物幾何などに置いても重要な意味を持つ。本研究においては最終的には１において提示した予想を解きスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型を解き分類を完成させるのが目標であるが、さしあたっては以下のような問題設定を考えた。

（１）無限小指標が非特異という条件を外し、gl(n,C)の場合のスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型の分類を完成させる。

（２）ランクが低い場合に分類。

（３）鏡映に対応する場合など特別な条件下の元での精密な結果を得る。

（４）スカラー型からそうでない場合への準同型を調べる。

３．研究の方法

結果が得られるなら手段には拘らないのは当然であるが, 代数的な手法の適用が中心となる。その中で主なものを以下に挙げておく。

(1) translation principle

有限次元表現とのテンソル積を考えて普遍包絡環の中心が適切に作用する部分を切り出す操作は関手を与え translation functor と言われる。適切な条件のもとでスカラー型の一般化された Verma 加群は translation functor はやはり別のパラメーラーに対応するスカラー型の一般化された Verma 加群に移される。関手なので準同型も対応して存在することになる。このことは色々な場面にお

いて使える有力な手法であるが、gl(n,C)の場合のスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型の分類の場合は、適切な条件を満たさないスカラー型の一般化された Verma 加群の間には、自明でない準同型が存在しないことを示す必要がある。そのために背理法を用いそのような準同型が存在したと仮定する。それに translation functor を適切なやり方で繰り返し適用し、より退化したパラメータをもつ、容易に存在し得ないことがわかる準同型の存在を導き矛盾を得るという方針である。gl(n,C)の場合には放物型部分代数のレビ部分代数は小さな gl の直和になっているためそれに応じてスカラー型の一般化された Verma 加群のパラメータはブロック分けできる。無限小指標が非特異の場合は各ブロックが干渉しないので、一つづつのブロックの部分を適切な順番に動かしていけばいいので比較的優しく、上記のような適切な操作が得られる。　一方無限小指標が特異な場合は各ブロックが干渉し、うまく整合性を保ったまま複数のブロックを動かす必要があり、問題は格段に難しくなる。

（２）スカラー型の一般化された Verma 加群の普遍包絡環における annihilator の比較
分類において一つのカギになるのはスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型が存在するためには、放物型部分代数から自然に定まるある種の Weyl 群の作用でパラメータが移りあうことが必要になることである．これは対応するスカラー型の一般化された Verma 加群の普遍包絡環における annihilator が一致しないことを示せばそれから従うが gl(n,C) の場合には Borho-Jantzen の結果が有り、それが分類の完成のための重要なステップになっている。

（３）スカラー型の一般化された Verma 加群の極大部分加群の比較
スカラー型一般化された Verma 加群は一意に定まる極大部分加群を持つ。自明でないスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型は常に単射であるので極大部分加群の異なるスカラー型の一般化された Verma 加群の間には自明でない準同型は存在しないことになる。極大部分加群は Kazhdan-Lusztig 理論から原理的に決定できるのではあるがランクが大きな場合は具体的な結果を出すにのには現実的ではない。現状は ad hoc なやり方で極大部分加群がわかる場合もあるという状況である。

（４）Soergel のカテゴリーO のコクセター系による特徴づけ
カテゴリーO とは一般化された Verma 加群を含む g を複素簡約 Lie 代数のあるクラスの加群のなすカテゴリーであり、重要な数学的対象である。Soergel はカテゴリーO の各ブロックは integral Weyl group によって定まることを示した。　これにより一般化された Verma 加群の間の準同型の存在問題を異なるより簡単な簡約リー代数の対応する問題に帰着することができる。

（５）Jantzen の既約性判定条件
一般化された Verma 加群の既約性が判定できるので例えばターゲットになっている加群が既約なら自明な準同型しかないことがわかる。

４．研究成果
（１）研究の目的であげた(2)-(4)についてはそれぞれ進展はあったものの決定的な結果は得られなかったが、(1)については望ましい形で解決することができた。これまでにスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型分類の完成していた簡約リー代数は本質的にランクが非常に小さい場合だけであったがこれで初めてランクがいくらでも大きくなる１つの系列について分類が完成したことになる。また１で述べた予想が一般の場合に正しいことの蓋然性が増したと考えられる。

（２）gl(n,C)のスカラー型の一般化された Verma 加群の普遍包絡環における annihilator の比較に関する Borho-Jantzen の結果を gl(n, C)$以外の簡約 Lie 代数に拡張することを念頭に置いて精査した。そこで translation functor を使った Borho-Jantzen とは別のアプローチを見出しまず gl(n,C)の場合の別証明を与えた。このやり方はほかの古典型特にＢ型Ｃ型の場合で対応する一般化旗多様体の余接束からのモーメント写像が像の上で双有理になる場合にも適用可能であると思われる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

[1] Hisayosi Matumoto,
On the homomorphisms between scalar generalized Verma modules, Compositio Math. 150 (2014) 877-892　査読あり.

[2] Hisayosi Matumoto,
Homomorphisms between scalar generalized Verma modules for gl(n.C), Int. Math. Res. Notices, 201 (2016) 3525-3547　査読あり.

〔学会発表〕（計 2 件）

1 松本久義, gl(n,C) のスカラー型一般化バルマ加群の間の準同型 ,Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2015, 2015 年 6 月,岡山いこいの村

2 Hisayosi Matumoto ,Homomorphisms between scalar generalized Verma modules of gl(n, C), Analytic Representation Theory of Lie Groups July 1 -July 4 , 2015 Kavli IPMU, Kashiwa-shi Chiba-ken

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況 （計 0 件）
○所得状況 （計 0 件）

[その他]
ホームページ等
https://www.researchgate.net/profile/Hisayosi_Matumoto

６．研究組織

(1)研究代表者
松本久義（MATUMOTO, Hisayosi）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：50272597