

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：13103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400007

研究課題名(和文)高次元マース関係式を用いた保型エル関数の研究

研究課題名(英文)Automorphic L-functions by using the generalized Maass relations

研究代表者

林田 秀一 (Hayashida, Shuichi)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・准教授

研究者番号：80597766

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：多変数保型形式であるジーゲル保型形式およびヤコビ形式について研究を行った。この研究において、具体的には、ヤコビ形式の行列指数の重さ整数と半整数の間の同型対応、ヤコビ形式のフーリエ・ヤコビ係数を用いて構成されるランキン・セルバーグ型ディリクレ級数(コーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数)の解析接続と関数等式、および、重さ半整数の池田リフトに付随するコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の具体的表示、を得た。

研究成果の概要(英文)：Siegel modular forms and Jacobi forms are modular forms of several variables. In this research some properties of Siegel modular forms and Jacobi forms were investigated. More precisely, the following results are obtained. The isomorphism between the space of Jacobi forms of matrix index of integral weight and of half-integral weight. The meromorphic continuation and functional equation for certain Rankin-Selberg type Dirichlet series (Kohnen-Skoruppa-Yamazaki type Dirichlet series). An explicit formula for a Kohnen-Skoruppa-Yamazaki type Dirichlet series which is constructed from half-integral weight version of the Ikeda lift.

研究分野：保型形式

キーワード：ランキン・セルバーグ型ディリクレ級数

1. 研究開始当初の背景

一般次数ジゲル保型形式のスピノル・エル関数の解析的性質は、1970年代にアンドリアノフやドリュエニユにより予想されているが未だ解決に至っていない。池田リフトで得られるジゲル保型形式のスピノル・エル関数は、一変数保型形式の対称テンソル型エル関数の積であることが知られており、ジゲル保型形式のスピノル・エル関数の解析的性質が得られれば、そこから一変数保型形式の対称テンソル型エル関数の解析的性質が導ける。1989年にコーネンとスコルツパは、フーリエ・ヤコビ係数の内積を分子にもつランキン・セルバーグ型ディリクレ級数を用いて次数2のジゲル保型形式のスピノル・エル関数の解析的性質を肯定的に導いた。このランキン・セルバーグ型ディリクレ級数は山崎正により一般次数のジゲル保型形式へ拡張されている。一方で、一般次数のマース関係式を用いて、桂田英典と河村尚明は、池田リフトのコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の具体的表示を得ていた。また桂田・河村は、池田リフトにより得られる重さ半整数ジゲル保型形式のケッヒャー・マース級数の具体的表示を得て、その留数を比較することで、池田リフトの周期の予想を解決している。保型形式の研究においては、現在、表現論を用いた保型表現による研究が盛んであるが、保型表現を用いない手法で、コーネン・ザギエ公式や桂田・河村の結果、あるいはケッヒャー・マース級数の研究なども行われており、保型形式を研究する上で重要な役割を果たしてきている。本研究においては、特に、ある種のジゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数の間の関係式である一般化マース関係式を用いて、ジゲル保型形式に付随するエル関数やディリクレ級数を考察する。

2. 研究の目的

本研究においては、アンドリアノフ・ドリュエニユ予想の解決へ向けたコーネン・スコルツパのディリクレ級数の手法の拡張を主な目的としていた。その為に、一般化マース関係式の精密化を行い、池田リフトの一般の指数サイズのフーリエ・ヤコビ係数でのコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の具体的表示を求め、また、重さ半整数のジゲル保型形式の場合のコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の解析的性質を導き、池田リフトのフーリエ・ヤコビ係数の周期の具体的表示を得ること、などを目的としていた。

3. 研究の方法

ジゲル保型形式のスピノル型エル関数と、コーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数との関連を調べ、スピノル型エル関数の解析的性質をディリクレ級数の解析的性質に帰着させる。これは次数2のジゲル保型形

式においては、コーネンとスコルツパにより、指数1のフーリエ・ヤコビ係数が非零であるという条件の元で、スピノル型エル関数と、コーネンとスコルツパにより導入されたディリクレ級数との関連が知られていた。彼らはこのディリクレ級数の解析接続と関数等式を証明することで、次数2のジゲル保型形式のスピノル型エル関数の解析接続と関数等式の別証明を与えていた。本研究の主な目的はこの手法の一般ジゲル保型形式への拡張である。その為にまずは、次数2でのマース関係式を一般次数で得る。整数指数のフーリエ・ヤコビ係数および行列のサイズが2で特別な指数を持つフーリエ・ヤコビ係数に関する一般化マース関係式については、山崎正および筆者により得られていた。一般次数のジゲル保型形式のスピノル型エル関数をコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数に帰着させるためには、より精密な一般化マース関係式が要求されると期待される。一般化マース関係式を求め、関連するディリクレ級数の解析的性質を導く。また、池田リフトで得られる重さ半整数のジゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数の周期の具体的な表示を得ることで、コーネン・ザギエによる、保型形式のエル関数の特殊値と重さ半整数の保型形式のフーリエ係数との公式を一般化する。

4. 研究成果

(1) 重さ整数の行列指数のヤコビ形式の空間と、重さ半整数のある行列指数のヤコビ形式の空間の同型対応を証明した。この同型対応においては、同型写像と互いのヘッケ作用素との可換性も証明している。また、ヤコビ形式でのコーネン・プラス空間の導入も行っている。重さ半整数のプラス空間に属するジゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数達が、このヤコビ形式でのプラス空間に含まれるという事実や、特に一般化コーエン型アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数達がこのヤコビ形式のプラス空間に含まれることなどから、このヤコビ形式でのコーネン・プラス空間は重要であると考えられる。一般化コーエン型アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数は重さが半整数のヤコビ形式であるが、この同型対応を用いることで、重さ整数の行列指数のヤコビ形式に帰着することができる。またヤコビ形式でのコーネン・プラス空間に属するヤコビ形式から、そのテイラー展開の定数項を構成することにより、一般化プラス空間に属するジゲル保型形式を構成することもできる。ヤコビ形式での志村対応はまだ得られておらず、今後の課題として残っている。この同型対応は、伊吹山により得られていたジゲル保型形式の一般化プラス空間と指数1のヤコビ形式の同型対応の結果の一つの拡張である。この研究成果の論文は2018年度のOsaka Journal of Mathematicsに掲載予定である。

(2) ヤコビ形式でのコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の解析接続と関数等式を証明した。この結果は、ジーゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数を用いたランキン・セルバーグ型ディリクレ級数(本研究においては、コーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数とよんでいる)の解析的性質の山崎正による結果のヤコビ形式への拡張である。ヤコビ形式のテータ展開を用いて、このディリクレ級数の積分表示を行い、すでに知られていたクリンゲン型アイゼンシュタイン級数の解析的性質を用いることで、この証明を得ている。また、このコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数のいくつかの留数も求めている。この留数は、元々のヤコビ形式の周期となる。ジーゲル保型形式やヤコビ形式のフーリエ・ヤコビ展開ごとに、コーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数を構成することができる。次数2のジーゲル保型形式を2回フーリエ・ヤコビ展開することにより、2変数のランキン・セルバーグ型ディリクレ級数が構成できるが、このディリクレ級数は、イマモグ・マーティンにより導入されており、2変数関数としての解析接続と関数等式を彼らは得ている。同様に次数 n のジーゲル保型形式で、 n 変数のランキン・セルバーグ型ディリクレ級数を構成することができるが、この解析的性質は今後の課題である。一方において、本研究において、コーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の留数が得られていることにより、上記の n 変数ランキン・セルバーグ型ディリクレ級数の留数がジーゲル保型形式の周期になることも分かる。ただし、それには n 変数ランキン・セルバーグ型ディリクレ級数の解析接続を証明することが必要である。この結果の論文はすでにプレプリントとしてまとめており、アーカイブに投稿しており、また査読雑誌に投稿予定である。

<https://arxiv.org/abs/1804.04319v1>

(3) 池田リフトを経由して構成される重さ半整数の偶数次数のジーゲル保型形式に付随する、あるコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の具体的表示を得た。これは、負の基本判別を渡る和として表示することができ、それぞれの項に無限積があらわれる。この具体的公式にあらわれる、重さ半整数ジーゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数の周期を求めることは今後の課題として残っている。この結果はコーネン・ザギエにより知られていた、重さ半整数楕円保型形式のランキン・セルバーグ型ディリクレ級数の表示のある一般化である。また桂田・河村により得られていた、重さ整数の池田リフトに付随するコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数の具体的表示の、重さ半整数版ともみなすことができる。桂田・河村により得られた、重さ整数の池田リフトに付随するコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数は、一変数保型形式とリーマン・ゼータ関数など

との積であったが、重さ半整数の池田リフトに付随するコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数では、負の基本判別式に渡る和となっていることが異なる点であり、特徴である。また一変数保型形式から構成されるある二変数のディリクレ級数の具体的表示にも同様の無限積が現れることが、伊吹山・桂田より知られている。伊吹山・桂田は、クリンゲン型アイゼンシュタイン級数のケッヒャー・マース級数を用いて、この二変数ディリクレ級数の片方の変数を固定した場合での解析接続と関数等式を得ている。しかし、本研究で考察しているコーネン・スコルツパ・山崎型ディリクレ級数に現れる無限積は、伊吹山・桂田の考察したケッヒャー・マース・ディリクレ級数の収束の範囲外にあることから、それぞれのディリクレ級数の関連は得られていない。ただし、次数が1の場合は、コーネン・ザギエの結果があることから、次数が一般の場合も同様に、一変数保型形式の指標付きエル関数の特殊値と、池田リフトのフーリエ・ヤコビ係数の周期との関連が期待される。今後、さらなる研究が必要である。本研究成果はプレプリントしてまとめてあり、アーカイブで読むことができ、また査読雑誌に投稿予定である。

<https://arxiv.org/abs/1805.06134v2>

(4) これまでに得られていた一般化マース関係式は、主に整数指数のフーリエ・ヤコビ形式に関する関係式であったが、Gütech 大のベルンハルト・ハイムとの共同研究により、行列のサイズが $(n-1)$ となる指数を持つフーリエ・ヤコビ係数に関する一般化マース関係式も得られた。ここで n はジーゲル保型形式の次数である。本研究においては、 r を1から n までの数とした時の、行列のサイズが r となるフーリエ・ヤコビ係数の一般化マース関係式を得ることが目標であったが、 r が1および $n-1$ 以外の場合は行列の計算が極めて困難であることがわかり、未だ指数のサイズ r のマース関係式が得られていないが、ジーゲル保型形式の微分作用素を用いたアプローチがまだ残っている。また、コーネン・ザギエにより、重さ半整数楕円保型形式のランキン・セルバーグ型ディリクレ級数の具体的表示が得られていたが、そのレベル付きの場合の研究は現在、共同研究として進行中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① Shuichi HAYASHIDA, Lifting from two elliptic modular forms to Siegel modular forms of half-integral weight of even degree, Documenta Mathematica, 査読有, Vol. 21, 2016, pp. 125-196.
<https://www.math.uni-bielefeld.de/do>

cumenta/vol-21/05.pdf

[学会発表] (計 2 件)

- ① Shuichi HAYASHIDA, Kohnen-Skoruppa-Yamazaki type Dirichlet series with respect to certain Siegel cusp forms of half-integral weight, Workshop on Jacobi forms and applications 2018 年 3 月 15 日、ノッティンガム(イギリス)
- ② Shuichi HAYASHIDA, Relations among Fourier-Jacobi coefficients of Siegel-Eisenstein series and their applications, Workshop on number theory and modular forms 2016, 2016 年 12 月 22 日、陝西省渭南(中国)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

<http://juen.ac.jp/lab/hayasida/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

林田 秀一 (HAYASHIDA, Shuichi)
上越教育大学・大学院学校教育研究科・
准教授
研究者番号：80597766

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

青木 宏樹 (AOKI, Hiroki)
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号：10333189

(4) 研究協力者

なし