様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ４ 月 ２７ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００１２

研究課題名（和文）代数群の明示的簡約理論

研究課題名（英文）Explicit reduction theory of algebraic groups

研究代表者
渡部　隆夫（Watanabe, Takao）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：３０２０１１９８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、代数体上で定義された等方的簡約線形代数群に対し、リシュコフ領域を経由して数論的部分群による算術商の基本領域を構成するという新しいアプローチにより、一般線形群の極大数論的部分群の作用に関する基本領域の具体的構成を行った。リシュコフ領域は極大放物的部分群に依存して定まる算術的最小関数から定義されるが、もとになる極大放物的部分群の取り方を変えることにより、異なる型の基本領域が構成できる。とくにこの構成方法は，コルキン-ゾロタレフ簡約領域の一般化を与える。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we construct fundamental domains of arithmetic quotients of isotropic reductive groups over number fields by using Ryshkov domains. A Ryskov domain is defined by an arithmetical minimum function, which depends on a choice of a maximal parabolic subgroup. If we take different maximal parabolic subgroups, then we have different fundamental domains. In the case of general linear groups, we give explicit descriptions of several fundamental domains. Our construction gives a generalization of Korkine-Zorotareff reduction.

研究分野：代数群の整数論

キーワード：基本領域　数論的部分群　簡約代数群

１．研究開始当初の背景

実数に成分をもつ一般線形群または特殊線形群の簡約理論は、ラグランジュ、ガウス等による２元２次形式の簡約の研究を端緒とし、 任意の次元におけるエルミート、ミンコフスキー、ボロノイ等の研究を経て、現代的視点では簡約代数群の理論の枠組みで、数論的部分群による算術商の基本領域を求めることと理解される。基本領域の古典的な構成方法については、一般線形群の場合は、コルキン-ゾロタレフ、ミンコフスキー及びボロノイの簡約理論等がよく知られており、直交群やシンプレクティック群等の典型群の場合は、エルミート、ビアンキ、アンベール、ジーゲル等による方法が知られている。代数体上で定義された一般の簡約代数群については、代数群の理論の整備と共に、１９６０年代前半にボレル、ハリッシュ-チャンドラ、ゴドマン等によりジーゲル集合が導入され、近似的な基本領域が構成された。ここで近似的であるとは、領域による分割がタイル張りではなく、有限個の重なりを許容することを意味する。この ボレル、ハリッシュ-チャンドラ理論は、数論的部分群の有限表示や算術商のベイリー-ボレルコンパクト化、多変数保型関数論における級数・積分の収束性の論証に基本的な役割を果たし、一般論としての簡約理論研究はここにひとまず収束した。その後、基本領域構成や境界面の記述についての研究は、それぞれ個別の群において、ファベル、フランシス、パーカー、グレニエ、マクファーソン、マッコネル等で散発的になされている。しかしながら、一般的理論としてボレル、ハリッシュ-チャンドラ理論を見直すと、そこで構成されている基本領域は近似的なものであり厳密な意味での基本領域を与えるものではないこと、また基本領域を与える境界セルの記述や交叉状態が不明である等、簡約理論における我々の知見は未だ限定的であると思わざるを得ない。研究代表者は、２０１１年～２０１３ 年に行った研究課題において、格子球充填問題の領域で研究されてきたリシュコフ多面体やボロノイの基本定理に用いられたアイデアをもとに、ジーゲル集合とは異なる視点から基本領域の一般的構成方法を考案した。新しい構成方法は、一般線形群の場合にはコルキン-ゾロタレフの簡約理論を包摂するとともに、それとは異なるタイプの簡約理論も与えることができる。種々の簡約理論が同時に構成できるという新しいアプローチにより、簡約理論の新たな側面とこれまでよりも深い理解が得られると考えたのが、この研究プロジェクトの動機である。

２．研究の目的

これまでの研究により、代数体上定義された一般の等方的簡約代数群の算術商に対し、研究代表者により定義されたリシュコフ領域を経由して、算術商の基本領域 が構成されることが解っている。リシュコフ領域は、極大放物的部分群から定まるアデール群上の高さ関数並びにそれから決まる算術的最小関数により記述され、本質的に最初の極大放物的部分群の選び方に依存する。言い換えれば、極大放物的部分群の取り方を変えるたびに、異なる型の基本領域が得られる。これらの構成方法は一般的に記述できるが、個別の群において領域の定義不等式を具体的に与えるということに関しては、独自の計算を必要とする。本研究の目的は、個別具体的な簡約代数群について、これら種々の基本領域の具体的記述とその性質を調べることである。性質の中でとくに重要と考えられるのは、境界面の有限性である。これは、構成された基本領域の境界を与える等式は構成段階では一般に無限個の等式の族で与えられるが、その中の有限個の等式ですべての境界が記述されるという性質である。この性質が我々の構成方法でつねに満たされるのかどうかはまだ証明できていないが、基本領域の具体的記述がこの性質を示すための手掛かりになると考える。

３．研究の方法

代数体上の一般線形群の場合を中心に、種々の基本領域の具体的記述とその性質を調べた。一般論の中で定式化できる性質は研究代表者が調べ、一般線形群に適用した際の具体的計算は，大学院学生のリー ティム ウェンが行った。連携研究者の早田孝博は、境界面の定義方程式を求める際に不可欠な情報である最小点集合を計算するアルゴリズムについて研究を進めた。研究代表者は２０１４年７月に韓国で行われた研究集会と２０１６年１月にドイツで行われた研究集会に参加し，関連分野の専門家と討論・情報交換をした。また関連する雑誌・書籍を購入し新しい結果や方法についての情報集積を行うとともに、国内で開催された整数論、代数的組み合わせ論など関連分野のセミナーや研究会、日本数学会の学会に出席し、情報収集と研究成果の報告を行った。

４．研究成果

(1) ２０１１年～２０１３ 年に行った研究課題において、研究代表者は林琢磨、矢野祥士との共同研究により総実代数体上定義された一般線形群におけるリシュコフ領域の記述とボロノイ簡約理論を完成させた。この研究をもとにダン ヤサキは実２次体のケースを詳細に調べ、１変数完全２次形式の同値類がただ一つであるような実２次体は無限に存在することを示した。これに関連して研究代表者は小松弘幸との共同研究で、3 次体でも同様なことが成り立つ、すなわち石田族に属する 3 次体では１変数完全２次形式の同値類はただ一つしかないことを示した。

(2) ２０１１年～２０１３ 年に行った研

究課題において、研究代表者はボロノイ簡約理論の考察をもとに、一般的な簡約代数群に対しそのアデール群上でリシュコフ領域を定義し、リシュコフ領域内にアデール群の算術的商空間の基本領域が構成できることを示した。この方法は、標準的な放物的部分群を決めるごとに基本領域の構成を与えるので、簡約代数群の階数が２以上の場合は複数の異なる型の基本領域が構成できるという特徴をもつ。しかしながら、アデール群の基本領域からそのアルキメデス付値部分として現れる実リー群の算術商に対する基本領域を構成し記述するには、独自の計算が必要である、リー ティム ウェンは、任意の代数体上の一般線形群に対しこの問題を考察し、次の結果を得た。代数体 k 上の一般線形群 GL(n) のアデール群における各類に対応して、極大数論的部分群 Γ が定まる。このような Γの共役類の個数は k の類数に等しい。以下その類数を h と表すことにする。
① Q をGL(n)の任意の極大放物的部分群とするとき、GL(n,k)の Q(k)とΓによる両側剰余類の個数はΓに依らず h に等しい。
② GL(n)のアデール群の無限素点部分を G とするとき、G/Γの基本領域が明示的に構成できる。この構成は、極大放物的部分群 Q と k のイデアル類の代表の取り方に依存する。
③ ②と同様に、アンベール形式の空間に対するΓの作用に関する基本領域が明示的に構成できる。この構成も極大放物的部分群 Q と k のイデアル類の代表の取り方に依存する。
④ 二つの極大放物的部分群が GL(n)の外部自己同型写像によって移りあうときに，それぞれに対応して②または③で構成される二つの基本領域の間の関係が記述できる。
以上の結果について,kの類数が1の場合は、一般論の適用例として研究代表者が(④を除き)示したものである。上に述べたリーの結果はそれを類数が２以上の代数体に拡張したものである。また、k が有理数体で、Q が一つの直線を保存する極大放物的部分群，すなわちレビ部分群が GL(1)と GL(n-1)の直積と同型になる極大放物的部分群ならば、③の明示的な基本領域はコルキン-ゾロタレフによる基本領域と一致することが解る。この意味で、我々の構成方法はコルキン-ゾロタレフ簡約理論を包含しており、さらに Q として他の極大放物的部分群をとった場合には、別の型の基本領域を具体的に得ることができるという意味で、簡約理論に新しい知見を加えた。過去の研究においては、対象とする数論的部分群が k の整数環に成分をもつ一般線形群の場合に限定されていることがほとんどであるが，今回は任意の極大数論的部分群についての結果を与えているという点にも新規性がある。以上の成果について、研究代表者はドイツの Oberwolfach 数学研究所で開催された国際研究集会で報告を行い、リーは京都大学数理解析研究所で開催された国際研究種会で報告を行った。

（３）ボロノイ簡約理論においては、完全２次形式に関する格子の最短ベクトル集合を求めることが、ボロノイの基本領域を具体的に記述するための基本情報となる。この類似として、我々が考案した簡約理論では、算術的最小関数から各アデール群の元ごとに決まる最小点集合が同様な役割を果たす。GL(n)の場合は、最小点はグラスマン多様体の元であり、最小点集合はグラスマン多様体の有限部分集合として定義される。格子の最短ベクトルを求めるアルゴリズムとしてＬＬＬアルゴリズムがよく知られているが、最小点を求めるための良いアルゴリズムは今のところ知られておらず、それが境界面の研究に対する障害、とくに具体例を計算する際の障害となっている。早田孝博はこの数年間上半空間のジーゲルモジュラー群の作用に関するゴットシュリング基本領域の境界セルについての研究を続けているが、最近この研究に関連して最小点集合を求める一つのアルゴリズムを見つけた。このアルゴリズムについての研究と応用は今後の課題であるが、最小点集合の計算に有効性があると期待される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）
① H. Komatsu and T. Watanabe, Perfect unary forms over certain cubic fields, International Journal of Number Theory, 査読有，10 巻，2014，1337-1342.
DOI: 10.1142/S1793042114500304

② T. Watanabe, Ryshkov domains of reductive algebraic groups, Pacific Journal of Mathematics，査読有，270 巻，2014，237--255.
DOI: dx.doi.org/10.2140/pjm.2014.270.237

③ T. Hayata, H, Koseki，T, Miyazaki and T. Oda, Matrix coefficients of discrete series representations of SU(3,1), Journal of Lie Theory，査読有，25 巻，2015，271-306.
http://www.heldermann.de/JLT/JLT25/JLT251/jlt25014.htm

〔学会発表〕（計４件）
① 渡部隆夫，Fundamental domains of arithmetic quotients of reductive groups, 「Integral Quadratic Forms and Related Topics」，2014 年 8 月 7 日，Hyundai Hotel, Gyeongju(Korea).

② 渡部隆夫，Fundamental domains of arithmetic quotients of reductive groups, 「Lattices and Applications in Number

Theory」, 2016年1月18日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany.

③ 早田孝博, Computing Kissing Numbers on Classical Groups, 「金沢数論ミニ集会２０１６」, 2016年12月8日, 金沢大学サテライトプラザ.

④ Lee Tim Weng, Fundamental domains of arithmetic quotients of the general linear group and Humbert forms, 「保型形式とその周辺」, 2017年2月7日, 京都大学数理解析研究所.

６．研究組織

(1)研究代表者
渡部　隆夫（WATANABE, Takao）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30201198

(3)連携研究者
早田　孝博（HAYATA, Takahiro）
山形大学・理工学研究科・准教授
研究者番号： 50312757

(4)研究協力者
Lee Tim Weng
大阪大学・大学院理学研究科・
博士後期課程2年