

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400013

研究課題名(和文) 保型 L 関数の多重化とその特殊値の生成する代数構造

研究課題名(英文) The structure of the algebra generated by special values of multiple modular L-functions

研究代表者

井原 健太郎 (Ihara, Kentaro)

大阪大学・インターナショナルカレッジ・准教授

研究者番号：00467523

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：従来の保型関数に付随する L 関数を多変数関数に拡張した「多重保型 L 関数」を導入して、その関数の値を具体的に数値として計算することで、値の間に存在する代数的な構造を調査した。保型関数の重さとレベルという概念により代数構造が大きく異なる現象を見つけ、代数の大きさに上限が存在することを証明した。

研究成果の概要(英文)："The multiple modular L-functions" are introduced as a generalization of modular L-functions. Several special values of the functions are computed numerically. The algebraic structure of those values fully depends on the weights and levels of modular functions. An upper bound of the size of the algebra is given explicitly in this research.

研究分野：整数論

キーワード：multiple L-function multiple zeta values elliptic modular form

1. 研究開始当初の背景

古くから整数論のみならず数学の諸分野でその重要性が認識され、種々の研究が続くゼータ関数や L-関数であるが、その多重化の存在の発見や意義や有効性が認識されたのは近年のことである。実際、最も基本的なゼータ関数といえる Riemann ゼータ関数の多重化「多重ゼータ関数」が 90 年代前半に登場し、その後 Dirichlet L-関数などの多重化も導入され、ゼータ関数や L-関数の定義級数を多重化することが、ゼータ関数や L-関数の自然な積分表示を反復積分化する操作に応じているというメカニズムが明らかになってきた。一方の保型形式に対して定義される保型 L-関数は整数論の主要テーマであり、盛んな研究が進行中である。特に保型 L-関数の臨界点における特殊値は保型形式の「周期」と呼ばれ、周期の生成する空間がカusp形式の空間と同型になるという重要な現象がある。この状況が保型 L-関数の多重化を導入しその臨界点を考えた場合にどのように一般化されるだろうか、という自然な疑問から本研究はスタートしている。

2. 研究の目的

この研究では、従来の保型形式の理論へ、近年の多重ゼータ関数の理論と手法を導入することで、保型形式とそれに付随する L-関数の多重化の理論を構成することを目的としている。まず、保型形式に対し定義される L-関数の多重化「多重保型 L-関数」を導入し、その正整数点とくに臨界点に於ける特殊値に関する研究を行う。また「多重 L-関数の特殊値が生成する代数(周期代数)」の構造を具体的に明らかにする。保型形式の重さとレベルから定まる次数付きの代数として、周期代数の生成元の個数や関係式を調べ、その由来と整数論的意味を解明することを目的とする。

3. 研究の方法

多重保型 L-関数の臨界値が生成する代数(周期代数)の構造を調査する方法の 1 つは、周期を数値実験に基づいて具体的に高精度で計算し、代数生成元や関係式を定量的に発見、分析する方法である。線形関係を具体的に書き出すことで周期の張る空間の線形次元及び代数生成元の個数を具体的に計算することができ、代数の大きさを測ることが可能になる。2 つ目の方法は、多重保型 L-関数の反復積分表示を応用し、保型性と被積分関数の特殊性を利用して、周期の関係式族の存在を証明する方法である。これにより周期代数の構造を調査できる。積分の反

復数に関する帰納的な構造を利用し、被積分関数への Fricke 双対と Hecke 作用に着目して、1 つ目の方法による実験観察結果に証明と根拠をつけることができる。

4. 研究成果

(1) 重さが 2 でレベルが N の楕円カusp形式に対して、付随する多重 L-関数の周期を数値計算するプログラムを作成した。カusp形式のフーリエ級数を項別積分するという手法を実装し、フーリエ級数の収束が遅い点では Fricke 反転を用いることで収束速度を上げ、反復積分の経路の結合の記述には、反復積分を係数にもつ非可換巾級数のコサイクル条件を活用した。このプログラムにより多重 L-関数の周期の数値計算がスムーズに実行できるようになった。

(2) (1)のプログラムを用いて、重さが 2 でカusp形式の空間の次元が小さいレベル N に対し、付随する周期を数値計算することで、周期を満たす有理数係数の線形関係式、代数関係式を多く発見した。そのデータから周期代数の各斉次部分空間の次元と代数生成元の正確な個数、或いは上限を与える予想公式を与えることができた。周期の計算は主に数式処理ソフト Mathematica を用い、線形関係の探索には GP-Pari を用いた。重要な成果として、以上の数値実験的に得られた予想公式を理論的に証明することができた。それには Fricke 反転とシュッフル積を用いて生成される代数関係式全体を母関数とそれへのある群作用で記述することが有効であった。

また有理数体の有限次拡大体まで係数を拡大することで現れる線形関係が存在するという興味深い例も見つけることができた。また、一般的な代数構造の観察として、レベル N により周期代数の構造が大きく異なることが分かった一方で、異なるレベルでも代数構造が同型になる場合が頻繁に起こることが観察できた。多重ゼータ値の生成する代数の場合、周期代数は自由代数になると予想されている。これは対応する混 Tate モチーフの淡中 Lie 環の高次のコモホロジーの消滅性から、そう予想されている。一方、今回の計算では周期代数が無変数の多項式環と同型と思われるレベルがある一方で、多項式環のある斉次関係式 1 本で割った代数と同型と予想される例も観察でき、レベルによって自由性が大きく異なるという現象を見つけた。

上記の Fricke 反転とシュッフル積を用いて生成される代数関係式は関係式の大きな部分を占めるが、全てではない。残りの関係式が何を起因に生成されるのかを見つけることが、今後の重要な問題である。

(3) メリン積分変換を用いた多重保型 L-関数の 1 変数関数としての解析接続が Choie-Ihara により得られているが、その手法を簡易化し、多重保型 L-関数のある種の母関数を導入することでその積分表示と解析接続の簡明な証明方法を与えた。Choie-Ihara の議論における煩雑な 2 項係数の表示と反復積分に用いられた帰納法が不要になり、古典的な保型 L-関数の積分表示をそのまま拡張した簡素な形で解析接続が得られる。

(1)と(2)と(3)の結果はプレプリント に収録し投稿準備中である。また(1),(2),(3)の結果を専門家の集まる研究集会で講演する機会を得て、これまでの研究成果を紹介するだけでなく関連する研究を行っている研究者と直接、研究討論と研究交流を行った。

(4)本研究の多重保型 L-関数が shuffle 積構造を備えているのに対し、「Quasi-shuffle 積構造」をもつ「別種の多重保型 L-関数」を考察することが有効であるという視点に立ち、さらに両多重保型 L-関数の相互関係を通して互いの構造が見えてくるという着想から、Quasi-shuffle 積に関する一般的な性質についての研究を行った。これは多重 Dirichlet 関数の研究において shuffle 積と Quasi-shuffle 積を満たす多重 Dirichlet 関数が 2 種類存在しその相互関係を見ることが有効であったことに着想を得ている。この(4)の研究は米国の Michael E. Hoffman 氏との共同研究として行った。Hoffman 氏はこの分野にて最初に Quasi-shuffle 積の代数構造を定式化した多重ゼータ研究の一人者である。Quasi-shuffle 積に関する研究結果は共著論文として論文にまとめ J.of Algebra から出版された(文献)。

<引用文献>

Michael E. Hoffman, Kentaro Ihara 「Quasi shuffle products revisited」J. of Algebra, 481 pp293-326, (2017).

Kentaro Ihara 「Generating series of multiple modular L-functions」,preprint 投稿準備中

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

Michael E. Hoffman, Kentaro IHARA 「Quasi-shuffle products revisited」 Journal of Algebra, 481 (2017) pp. 293-326. 査読有り

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra>

〔学会発表〕(計 3 件)

井原健太郎 「On multiple modular L-values」Workshop on Multiple Zeta Values, 2014 年 8 月 22-23 日, 九州大学 (福岡市)

井原健太郎 「多重 L 関数の多重化とその特殊値」東北大学整数論セミナー, 2015 年 6 月 29 日, 東北大学(仙台市)

井原健太郎 「Basic on modular L-functions」大阪大学数学教室, 特別セミナー, 2016 年 7 月 4 日, 大阪大学(豊中市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等
http://www.kindai.ac.jp/sci/education/faculty_and_research/01_kentarou_ihara.html

6 . 研究組織

(1)研究代表者
井原 健太郎 (IHARA, Kentaro)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号 : 00467523

(2)研究分担者
無し ()

研究者番号 :

(3)連携研究者

無し ()

研究者番号 :

(4)研究協力者

無し ()