

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400016

研究課題名(和文) 関数体におけるGalois表現と保型形式の合同理論

研究課題名(英文) Theory of congruences of Galois representations and modular forms for function fields

研究代表者

服部 新(Hattori, Shin)

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：10451436

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Drinfeld保型形式の v 進合同理論の構築を目標に研究を行った。田口双対性を用いて、この場合の比較同型に当たるHodge-Tate-田口写像を定義した。これを使って、Fourier展開に高次合同のあるDrinfeld保型形式の重さの間に高次合同があること、従順レベル n のDrinfeld保型形式が v 進Drinfeld保型形式であることを証明した。

一方で、Drinfeld保型形式への将来的な応用に向けて、固有値多様体の幾何についても研究し、Hilbert固有値多様体の整数重さでの固有性や、固有値曲線の次数有限な既約成分に関するColeman-Mazurの予想を証明した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research project was to construct a theory of v -adic congruences for Drinfeld modular forms. Using Taguchi's duality, I defined the Hodge-Tate-Taguchi map, which is a torsion comparison isomorphism for the Drinfeld setting. With this map, I proved that Drinfeld modular forms with highly congruent Fourier expansions have highly congruent weights, and also that any Drinfeld modular form of tame level n is a v -adic modular form. I also studied the geometry of eigenvarieties, for future applications to Drinfeld modular forms. I proved the properness of Hilbert eigenvarieties at integral weights and a conjecture of Coleman-Mazur on irreducible components of Coleman-Mazur eigencurves of finite degree.

研究分野：整数論

キーワード：Drinfeld保型形式 固有値多様体

1. 研究開始当初の背景

近年の整数論において、代数体上の保型形式や p 進体の Galois 表現に関する合同の理論が重要な役割を演じるようになってきた。例えば、有理数体上の楕円固有形式はしばしば p 進解析的な族をなし、そこから固有形式の p 進的合同を大量に生み出すことができるが、それによって、扱うのが難しいクラスの保型形式の研究を簡単なクラスのものに帰着させる、という強力な手法が可能になる。また、保型形式の p 進族の性質はしばしば、 p 進体の Galois 表現の p 進族の性質から決定される。そのような、大域的な対象である保型形式と、局所的な対象である p 進体の Galois 表現の合同理論は、今世紀に入って大きく発展した。その中で、保型形式の普遍的な p 進族である固有値多様体 (eigenvariety) が定義され、その幾何的な性質が p 進体の Galois 表現の p 進族の理論を用いて明らかになってきた。

一方で、代数体の類似物である、標数 p の有限体 F_q 上の一変数関数体 $k = F_q(t)$ においても、楕円保型形式の類似物である Drinfeld 保型形式が定義され、盛んに研究されてきた。ところが、 v を $F_q[t]$ の素元とすると、楕円保型形式の p 進的合同・ p 進族の理論に対応する Drinfeld 保型形式の v 進的合同・ v 進族の理論は、未だその発展の揺籃期にあり、基礎的なことすらほとんど何もわかっていなかった。

2. 研究の目的

このような背景のもとで、本研究の目的は、関数体 k 上の Drinfeld 保型形式や、 v の定める素点での k の完備化 k_v の Galois 表現に対する合同理論の解明であった。具体的には以下の二点を目標にしていた。

(1) 楕円保型形式の p 進理論に対応する v 進 Drinfeld 保型形式の理論の構築。

(2) k_v の v 進 Galois 表現に対してその mod v Galois 表現の情報を解析する新しい手法の開拓。

3. 研究の方法

楕円保型形式の p 進理論において本質的な役割を果たしたのは、楕円曲線の標準部分群の理論と、その Hodge-Tate 写像との関係である。標準部分群とは Abel 多様体が通常還元に近い場合に存在する特別な部分群で、これによって (p 進理論において最も重要な) p での Hecke 作用素 U の性質を統制することができる。また、Hodge-Tate 写像は有限局所自由群スキーム G の Cartier 双対から G の

余接空間への準同型で、 G が Abel 多様体の標準部分群 C の場合は同型に近いことが知られている。特に Abel 多様体が通常還元の場合は C に対する Hodge-Tate 写像は同型であり、このことが楕円保型形式の p 進的合同を生み出す源泉となっていた。

Drinfeld 保型形式の場合、Abel 多様体の代わりに現れるのは Drinfeld 加群と呼ばれる加法群スキームであり、これらに対しても通常還元概念が定義できるが、その場合でも Hodge-Tate 写像は同型にはならない。そこで本研究では、有限局所自由群スキームのあるクラスに対して成立する田口双対を Cartier 双対の代わりに用いることで、Hodge-Tate 写像の類似を定義し、その性質を明らかにすることにより Drinfeld 保型形式の v 進的性質の解明に取り組んだ。

4. 研究成果

まず、Drinfeld 保型形式の普遍的な v 進族である固有値多様体のあるべき姿を見極めるために、固有値多様体の一般論について研究を行った。その結果、固有値多様体への写像から局所的には固有形式を構成できることが分かった。この一般論を代数体の Hilbert 保型形式に対して適用することにより、総実代数体 F 上の Hilbert 保型形式の固有値多様体の整数重さでの固有性と呼ばれる幾何的な性質を F に関する仮定のもとで証明した。このような高次元固有値多様体の幾何的な様子についてはまだ多くのことが分かっているとは言えず、特に次元以上の大域的な情報はこの成果以外には知られていないように思える。

また、この固有性と呼ばれる性質の応用として、楕円保型形式の固有値多様体である Coleman-Mazur 固有値曲線について、その次数有限な既約成分が重さ空間上有限であろうという Coleman-Mazur の予想を肯定的に解決した (James Newton (King's College London) との共同研究)。固有値多様体の既約成分は保型形式の何らかの p 進族と対応しており、その幾何的性質も保型形式の深い p 進的性質と関連していると考えられる。この成果は当初予期していなかったものであり、海外の p 進保型形式の研究者たちとの交流から生じたものである。

以上の成果はいくつかの論文にまとめて学術誌に投稿した (一部は採録決定している。発表論文リスト 1.)

次に、本筋である Drinfeld 保型形式の研究に移り、Abel 多様体における標準部分群の理論が Drinfeld 加群にも一般化されることを示した。Drinfeld 加群が通常還元の場合は、田

口双対性から得られる Hodge-Tate 写像の類似 (Hodge-Tate-田口写像と命名した) が標準部分群と余接空間との間の同型を引き起こすことも示した。これによって、標準部分群と Hodge-Tate 写像を用いて示されていた p 進楕円保型形式における基礎的な諸定理を、 v 進 Drinfeld 保型形式に一般化することができた。例えば、 $F_q[t]$ の定数でないモニック多項式 n で v と素なものに対し、次のような定理を証明した。

(1) f, g を重さ k, l , レベル $\Gamma_1(n)$ の ($F_q(t)$ 上の) Drinfeld 保型形式で、無限大での Fourier 展開の係数が $\text{mod } v^m$ で合同であるものとする。このとき、 k と l も $\text{mod } (q^d-1)p^s$ で合同。但し s は $p^s \geq m$ となる最小の整数。

(2) n に次数が $q-1$ と素な素因子があるとする。このとき、レベル $\Gamma_1(n) \cap \Gamma_0(v)$ の Drinfeld 保型形式は v 進 Drinfeld 保型形式。

これらの成果によって、 v 進 Drinfeld 保型形式の理論に対する幾何的な基礎づけが完了し、これまで主に解析数論的な手法で行われてきた v 進 Drinfeld 保型形式の研究が、幾何的な手法による新しい段階を迎えるものと期待される。

また、 v 進 Drinfeld 保型形式に関するこれらの成果については目下論文を作成中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 2 件)

1. S. Hattori, On canonical subgroups of Hilbert-Blumenthal abelian varieties, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux に掲載決定, 査読あり。

2. S. Hattori, Ramification theory and perfectoid spaces -- a survey, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **53** (2015), 47-63, 査読あり。

{ 学会発表 } (計 14 件)

1. 服部 新, Coleman-Mazur 固有値曲線の次数有限な既約成分は重さ空間上有限, 2017 早稲田大学整数論研究集会, 早稲田大学 (東京都新宿区), 2017 年 3 月 21 日。

2. 服部 新, Hilbert 固有値多様体の整数重みでの固有性について, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所 (京都府左京区), 2016 年 12 月 1 日。

3. S. Hattori, On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights, Workshop on Shimura varieties, representation theory and related topics, 京都大学 (京都府左京区), 2016 年 11 月 25 日。

4. S. Hattori, On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights, p -adic methods in arithmetic geometry at Sendai 2016, 東北大学 (宮城県仙台市), 2016 年 10 月 31 日。

5. 服部 新, Abel 多様体の標準部分群と Hilbert 固有値多様体の整数重みでの固有性, p 進保型形式、 p 進ガロア表現と関連する話題, 佐賀大学 (佐賀県佐賀市), 2016 年 10 月 17 日--21 日。

6. 服部 新, アーベル多様体の標準部分群とヒルベルト固有値多様体, 代数学シンポジウム, 佐賀大学 (佐賀県佐賀市), 2016 年 9 月 8 日。

7. S. Hattori, On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights, East Asia Number Theory Conference, 中国 (天津市), 2016 年 8 月 24 日。

8. 服部 新, Hilbert eigenvariety の整数重みでの固有性について, 数論・幾何学セミナー, (東京都目黒区), 2016 年 6 月 10 日。

9. S. Hattori, On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights, Shimura varieties and related topics, 台湾 (台北市), 2016 年 6 月 2 日。

10. 服部 新, Hilbert eigenvariety の整数重みでの固有性について, 整数論・保型形式セミナー, 大阪大学 (大阪府豊中市), 2016 年 5 月 6 日。

11. 服部 新, Hilbert eigenvariety の整数重みでの固有性について, 代数学セミナー, 九州大学 (福岡県福岡市), 2016 年 2 月 19 日。

12. 服部 新, Hilbert eigenvariety の整数重みでの固有性について, 早稲田大学整数論セミナー, 早稲田大学 (東京都新宿区), 2016 年 1 月 29 日。

13. 服部 新, Abel 多様体の標準部分群と固有値多様体, 数論幾何学セミナー, 北海道大学 (北海道札幌市), 2015 年 7 月 24 日--25 日。

14. S. Hattori, Ramification of crystalline representations, Classical and p -adic Hodge theories, レンヌ (フランス), 2014

年 5 月 20--22 日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~shin-h/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

服部 新 (HATTORI Shin)

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：10451436