

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400023

研究課題名(和文) K3楕円曲面のモデル・ヴェイユ格子の数論的研究

研究課題名(英文) Arithmetic aspects of Mordell-Weil lattices of elliptic K3 surfaces

研究代表者

鎌田 政人 (Kuwata, Masato)

中央大学・経済学部・教授

研究者番号：00343640

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：K3曲面のうち、いわゆる塩田 - 猪瀬構造を持つK3曲面から階数の大きな Mordell - Weil格子をもつK3楕円曲面を構成し、そのMordell - Weil格子の生成元について研究した。とくに、直積型のKummer曲面から得られる階数18のMordell - Weil格子の生成元を決定し、種数2の曲線のJacobi多様体から得られるK3楕円曲面で、直積型のKummer曲面では得られない階数15のMordell - Weil格子を持つ楕円曲面を構成した。さらに、そのMordell - Weil格子の定義体を調べるためにレベル3の構造を持つ種数2の主偏極アーベル曲面の族のモジュライ空間について考察した。

研究成果の概要(英文)：Using certain elliptic fibrations on a K3 surfaces with so-called Shioda-Inose structure, we constructed elliptic K3 surfaces with high Mordell-Weil rank, and studied their generators. In particular, we found generators of a Mordell-Weil lattice of rank 18 of an elliptic K3 surface obtained from a Kummer surface of product type. Also, starting from a Kummer surface of the Jacobian of a curve of genus 2, we constructed an elliptic K3 surface of Mordell-Weil rank 15, which could not be obtained from the Kummer surfaces of product type. To study the field of definition of such Mordell-Weil lattice, we studied the moduli space of principally polarized abelian surfaces with full level structure of level 3.

研究分野：数論幾何

キーワード：K3曲面 楕円曲面 Mordell - Weil格子 塩田 - 猪瀬構造 Jacobi多様体

### 1. 研究開始当初の背景

K3 曲面の研究は代数幾何内だけでなく数理論理学や数論など数学の様々な分野と深く結びついた非常に豊かな研究対象である。数論の分野でも近年 K3 曲面の数論的視点に立った研究は大きな発展を遂げている。K3 曲面は標準束が自明であるという意味で楕円曲線の 2 次元版と捉えることができるが、なかでも楕円曲面の構造を持つ K3 楕円曲面は楕円曲線の族でもあるという二重の意味で楕円曲線の数論と深く結びついた非常に興味深い研究対象である。

K3 曲面の幾何学的性質は Torelli の定理を通じて格子の問題として捉えることができ、この群論的方法でひとつの K3 曲面上には楕円曲面の構造の同型類は有限個しかないことも証明される。ある種の K3 曲面の族については、その曲面上の楕円曲面の構造の同型類を群論的に分類することもできている。しかし、このように群論を通じて存在が示される K3 曲面を方程式で具体的に記述することは容易ではなく、さらにその Mordell-Weil 格子の生成元をもとめることはとても難しい問題である。個別の曲面の性質を詳しく調べるにあたっては、このような楕円パラメータを具体的に記述することにより楕円曲面の Mordell-Weil 格子についてその生成元を具体的に表すという問題を扱うことがはじめて可能になる。ところが、近年このような K3 曲面に楕円曲面の構造をあたえる写像(楕円パラメータ)を具体的に記述する研究が大きく進展してきた。同種でない楕円曲線の直積  $E_1 \times E_2$  から得られる Kummer 曲面  $Km(E_1 \times E_2)$  については、2007 年の塩田氏との共同研究により、すべての楕円パラメータを具体的に書き下すことができている。また、2011 年には Abhinav Kumar 氏により  $J(C)$  から得られる Kummer 曲面についても楕円パラメータが具体的に記述されている。このような楕円パラメータから得られる楕円曲面について、いわ

ゆる base change の方法を用いると、これらの楕円曲面からさらに階数の大きい Mordell-Weil 格子を持つ K3 楕円曲面が得られることが知られている。しかし、そうした K3 楕円曲面の Mordell-Weil 格子の群論的構造や、生成元について具体的にわかっているものは本研究開始時点では非常に限定されたものしかなかった。

### 2. 研究の目的

本研究の主目標は Mordell-Weil 格子の階数が何らかの方法で大きくなることが予めわかる K3 楕円曲面を構成し、その Mordell-Weil 格子の構造を具体的に明らかにすることである。本研究では一般論を展開することよりも、個々の個性的な K3 曲面について可能な限り詳細な結果を得ることに主眼をおいたので、研究対象とする K3 曲面についても数論的視点から興味深いものだけに限定することにした。具体的にはいわゆる塩田-猪瀬構造を通じて Kummer 曲面や Abel 曲面と密接に結びついた K3 曲面に主眼を置き、次の 2 つの場合に焦点を当てて研究を進めた。Picard 数が標数 0 の体上の K3 曲面での最大値 20 である、いわゆる singular K3 曲面。

種数 2 の曲線の Jacobi 多様体から得られる Kummer 曲面から派生して得られる K3 楕円曲面。このうちでは Jacobi 多様体が 2 つの楕円曲線の直積と同種であったり、実乗法を持ったりするなど、特別な構造を備えている場合をとくに重点を置いた。

### 3. 研究の方法

これまでの研究を踏まえて以下の要領で研究を進めた。Mordell-Weil 格子の定義体(の上限)を考察する。定義体についての結果を踏まえ、Mordell-Weil 格子の元を探索し、有限指数の部分群を求める。Mordell-Weil 格子の群論的構造や Galois 群の作用を利用して、生成元を決定する。これ

らの研究のすべての段階において、コンピュータによる数式処理計算が欠かせない。たとえば、階数 18 の Mordell-Weil 格子の生成元をもとめることは理論上ではさほど難しくないので、具体的な計算は膨大で困難を極める場合が多い。こうした数式処理計算をそれに適した最新のソフトウェアを用い、しかも周到に計画した上で手際よく行うことが重要である。また、単に大容量高速コンピュータを用いるだけでは限界があるので、理論を通じた計算の工夫も必要である。たとえば、K3 楕円曲面の方程式を有限体上に還元してそこで生成元をもとめ、それを代数体上に引き戻すという手法なども有効である。このような手法について高い技術と経験をもつ Kumar 氏と緊密に連携し協力することは非常に有益であった。

国内外の研究者との意見交換、とくに海外の優秀な研究者との直接的議論は推進上極めて重要ななく割を果たした。A.Kumar 氏の他に、J. Hoffman (アメリカ), J.Top (オランダ), M. Schütte (ドイツ), R.Kloosterman (イタリア) 各氏の協力は本研究にとって重要な役割を果たした。

#### 4. 研究成果

(1) singular K3 曲面の分類は整係数正定値 2 次形式の分類に基づくが、このような 2 次形式の分類は Gauss に始まる虚 2 次体の数論と密接に関わっていることは周知の事実である。虚数乗法を持つ楕円曲線で有理数体  $Q$  上定義されるものは類数が 1 の虚 2 次体から得られることはよく知られているが、類数が 2 の虚 2 次体に対応して  $Q$  上定義された singular K3 曲面を構成することができる。さらにこれから base change の方法により  $Q$  上定義された階数 18 の K3 楕円曲面をそれぞれ 2 つずつ構成することができる。これら、これらの具体的な方程式をすべて書き下した類数が 2 の虚 2 次体は 29 個あるので、

計 58 個の  $Q$  上定義された階数 18 の K3 楕円曲面が構成された。

このような K3 楕円曲面の Mordell-Weil 群の定義体はもとの楕円曲線の  $n$  等分点の定義体と密接に関係することがわかり、レベル  $n$  構造をもつ楕円モジュラー曲面の理論を用いることにより、Kumar 氏の協力を得て Mordell-Weil 群の生成元を求める問題を原理的に解決した。そして、いくつかの具体例について実際に計算を遂行し生成元の具体的表示を得た。これには非常に複雑な数式処理計算を手際よく行う Kumar 氏の手腕に負うところ大である。

このような Mordell-Weil 格子の具体的表示でひとつの壁となるのが、猪瀬の K3 楕円曲面の階数が 2 である Mordell-Weil 格子の生成元を求めることである。Kumar 氏との共同研究では、生成元の具体的な表示は次数 2 の同種写像を持つ簡単な場合を除いては一般論としてしか扱えなかった。これについて、内海和樹氏との共同研究で次数 3 の同種写像を持つ場合について具体的かつ詳細な結果を得ることができた。

(2) 種数 2 の曲線  $C$  の Jacobi 多様体  $J(C)$  の Kummer 曲面  $Km(J(C))$  と塩田-猪瀬構造を通じて結びついた、いわゆる猪瀬曲面から base change の方法を用いて  $n$  重被覆として Mordell-Weil 格子の階数が大きい K3 楕円曲面を構成した。その一例として、直積型の Kummer 曲面からは得られない、階数 15 の Mordell-Weil 格子を持つ楕円曲面を複数の方法で構成した。

そのうち一つの方法は、塩田-猪瀬構造を通じて直積型の Kummer 曲面の場合と強い類似性をもつ直積型の Kummer 曲面の場合には、その Mordell-Weil 群の定義体はレベル  $n$  構造を備えた楕円モジュラー曲面の構造が密接な繋がりを持っていた。したがって、その類似として、レベル  $n$  構造を持つ種数 2 の曲

線の Jacobi 多様体 (= 主偏極アーベル曲面) の族が重要な役割を果たすと予想した。そこで、まずレベル 3 構造を持つ種数 2 の曲線の Jacobi 多様体 (= 主偏極アーベル曲面) の族をパラメトライズするモジュライ空間である 3 次元多様体をできる限り具体的に表示するという問題を考察した。このモジュライ空間は  $E_8$  型の Mordell-Weil 格子を持つある種の有理楕円曲面と関連づけられることは知られていた。さらに、この種の有理楕円曲面は R.Kloosterman 氏の研究により Mordell-Weil 群の階数が 6 である有理楕円 3 次元多様体の底空間を射影直線に制限して得られる有理楕円曲面と密接に関連している。この  $E_8$  型の Mordell-Weil 格子の生成元を求める問題を Kumar 氏の協力を得て解決し、それにより、モジュライ空間を構成することだけでなく、種数 2 の曲線の普遍族を構成した。さらに、その Jacobi 多様体の 3 等分点の具体的な表示についての結果も得ている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

1. Abinav Kumar, Masato Kuwata, Elliptic K3 surfaces associated with the product of two elliptic curves: Mordell-Weil lattices and their fields of definition, Nagoya Mathematical Journal 228 (2017), 124-185. 査読あり。

2. Abinav Kumar, Masato Kuwata, Inose's construction and elliptic K3 surfaces with Mordell-Weil rank 15 revisited, Higher Genus Curves in Mathematical Physics and Arithmetic Geometry, 131-141, Contemporary Mathematics 703 (2018). 査読あり。

3. Masato Kuwata, Kazuki Utsumi, Mordell-Weil lattice of Inose's elliptic K3 surface arising from the product of 3-isogenous elliptic curves, Journal of Number Theory 190 (2018), 333-351. 査読あり。

[学会発表](計 7 件)

1. Masato Kuwata: "Elliptic surface with

Mordell-Weil rank 18", Arithmetic and Algebraic Geometry 2015 (招待講演), 東京大学数理科学研究科, 平成 27 年 1 月 27 日

2. Masato Kuwata: "Elliptic surface with Mordell-Weil rank 18", Arithmetic 2015: Silvermania (招待講演), Brown University, 平成 27 年 8 月 13 日

3. Masato Kuwata: "Elliptic surface with high Mordell-Weil rank", 第 3 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ (招待講演), 北海道教育大学札幌駅前サテライト, 平成 27 年 8 月 19 日

4. Masato Kuwata: "Elliptic fibrations on K3 surfaces related to the Jacobian of genus 2 curves", 玉原数論幾何研究集会 2016, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 平成 28 年 6 月 21 日

5. Masato Kuwata: "Elliptic normal curves of degree 2N and modular groups", Tsuda College-OIST joint workshop on Calabi-Yau varieties, 津田塾大学, 平成 28 年 8 月 3 日

6. Masato Kuwata: "Shioda-Inose structure and elliptic K3 surfaces with high Mordell-Weil rank", Geometry and Physics of F-theory, Banff International Research Station, 平成 30 年 1 月 23 日

7. Masato Kuwata: "Elliptic normal curves of even degree and theta functions", 早稲田整数論研究集会, 早稲田大学, 平成 30 年 3 月 13 日

[その他]

ホームページ等

<http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~kuwata/>

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

鎌田 政人 (KUWATA, Masato)  
中央大学・経済学部・教授  
研究者番号: 00343640

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし