

令和元年6月25日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400026

研究課題名(和文)有限群のブロックの森田同値および導来同値について

研究課題名(英文)On Morita and derived equivalences for blocks of finite groups

研究代表者

功刀 直子 (Kunugi, Naoko)

東京理科大学・理学部第一部数学科・准教授

研究者番号：50362306

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：有限群のモジュラー表現における重要な問題の一つにブルエの可換不足群予想がある。2つの有限群が同じ可換シロー部分群をもちp-局所構造が一致するとき、2つの群の主ブロックは導来同値になるのではないかとこの予想である。この予想の解決には、局所部分群の導来同値を張りあわせて安定同値を構成する方法と、安定同値を導来同値へ持ち上げる方法を発展させることが重要である。また、非可換不足群をもつブロックの考察が重要である。本研究では、非可換バーテックスをもつスコット加群のブラウアー直既約性について結果を得た。また、ブラウアー樹木多元環の両側傾複体の構成に関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限群のモジュラー表現において、有限群のブロックの導来同値や森田同値での分類は重要な問題である。とくに可換不足群をもつブロックとその局所部分群のブロックの導来同値性を述べたブルエの可換不足群予想や、指定した群を不足群にもつブロックの森田同値類の有限性を述べたドノバン予想は重要である。本研究の成果は、これらの予想の解決に向けた各ステップにおいて役立つような成果であり、重要な成果であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：One of the important conjectures in modular representation theory of finite groups is Broue's abelian defect group conjecture. It states that the principal blocks of two finite groups having a common abelian Sylow subgroup and the same p-local structures should be derived equivalent. To solve the conjecture it is important to develop the way of gluing local derived equivalences to global stable equivalences and of lifting stable equivalences to derived equivalences. It is also important to investigate non-abelian defect group cases. In this research, we obtained a result for Brauer indecomposability of Scott modules with non-abelian vertex. We also obtained a result for construction of two-sided tilting complexes for Brauer tree algebras.

研究分野：代数学

キーワード：有限群 モジュラー表現 ブロック 森田同値 導来同値 安定同値

## 1. 研究開始当初の背景

有限群のモジュラー表現論における問題は主に、「与えられた有限群の素数  $p$  に関する表現の情報は  $p$ -部分群の正規加群など  $p$ -局所部分群の表現の情報から得られるのではないか」という考えに基づいている。 $p$ -局所構造 ( $p$ -部分群の共役の状況) が同じ 2 つの有限群のブロックでは、表現論的な情報が保たれるのではないかと考えられ、とくに加群の圏やその導来圏の関係について調べることは重要である。M. Broué は、2 つの有限群が同じ可換シロー部分群をもち  $p$ -局所構造が一致するとき、2 つの群の主ブロックの間には導来圏の三角圏としての同値があるのではないかと予想している (可換不足群予想)。

2 つのブロック間の森田同値は導来同値を、導来同値は安定同値を導くことが知られる。ブロックの導来同値の研究では、安定同値を構成することと、安定同値を導来同値や森田同値へ持ち上げることの 2 つが大きな問題であり、J. Rickard, R. Rouquier, 奥山哲郎を中心に研究が進められている。安定同値は、 $p$ -局所部分群のブロック間の導来同値の貼りあわせにより構成する方法があるが、「貼りあわせ」がうまくいくために、 $p$ -置換加群の Brauer 準同型による直既約性が問題となる。また、 $p$ -局所部分群の導来同値の貼りあわせによる安定同値の構成法は、中心に  $p$ -元をもつ群には適用できないなどの問題がある。それに対する部分的な結果もあるが、今後の課題として残っている状況であった。

また、可換不足群予想の解決のためには非可換不足群をもつブロックについての考察も重要である。可換不足群予想はシロー群が可換という仮定をはずすと成立しない例が知られるが、例えば有限体上の一般線型群など無限系列内の 2 つの有限群の場合、非可換シロー部分群をもつ場合でも、より強く森田同値が存在するのではないかと考えられている。これはまた、与えられた  $p$ -群を不足群にもつ有限群のブロックの森田同値類の有限性を述べたドノバン予想とも関係し重要である。無限系列における森田同値については、可換不足群をもつ場合にいくつか検証例が知られるが、非可換不足群をもつ場合については、適用できる一般論の整備がされていないため、ほとんど例がない状況であり、一般論の整備が待たれる状況であった。

## 2. 研究の目的

上記背景を踏まえ、可換とは限らないシロー部分群をもち  $p$ -局所構造を共有する 2 つの有限群について、主ブロック間の導来同値・森田同値を構成する手法を開発し、とくに非可換不足群をもつ一般線型群や関連する無限系列の群について森田同値類分類に応用することを研究の目的とする。具体的には以下の研究を行う。

- (1)  $p$ -局所部分群間の導来同値・森田同値を張り合わせることで安定同値を構成するために、置換加群の直既約因子のブラウアー直既約性、とくに非可換なバーテックスをもつスコット加群のブラウアー直既約性について考察する。
- (2) 安定同値から導来同値・森田同値を導く導く方法について、これまでに利用してきた構成方法をさらに発展させる。
- (3) (1)(2)を応用した主ブロック間の森田同値分類・導来同値分類を行う。とくに、同じ  $p$ -局所構造をもつ無限系列の有限群について、主ブロック間での森田同値の構成に応用する。

## 3. 研究の方法

有限群の表現論、多元環の表現論の手法を組み合わせ、具体的には以下のような方法で研究する。

- (1) 有限群の表現論の議論を用いて、置換加群の直既約因子のブラウアー直既約性について研究を行う。とくに、置換加群の直既約因子として重要であるスコット加群のブラウアー直既約性を考察する。可換なバーテックスをもつスコット加群のブラウアー直既約性については、Radha Kessar, 三橋尚文との共著論文においてフュージョン・システムの飽和性が必要十分条件として得られている。この結果を非可換の場合に一般化することを目指す。
- (2) (1)の結果と多元環の表現論において発展している導来同値・森田同値構成法を組み合わせることにより、具体的な群について導来同値・森田同値を検証しデータとして蓄積する。それらを考察することにより一般論を類推する。
- (3) (1)(2)の研究を一般線型群や関連する無限系列の群の森田同値類分類へ応用する。巡回不足群をもつブロックやいくつかの可換不足群予想・系列の森田同値分類の結果を利用することで研究を進める。

#### 4. 研究成果

以下のような研究成果を得ることができた。

- (1) 非可換なバーテックスをもつスコット加群のブラウアー直既約性についての考察を行った。スコット加群のブラウアー直既約性は、フュージョン・システムとの間には密接な関係があることが知られている。Kssar-Kunugi-Mitsuhashi (2011) は、与えられた有限群のあるスコット加群がブラウアー直既約性をもつとき、そのスコット加群のバーテックス上のフュージョン・システムは飽和的となることが示している。さらにスコット加群のバーテックスが可換であれば、逆が成立することも示されているが、バーテックスが可換とは限らない場合の考察はこれまでにほとんど行われていない。これに対し、本研究では、非可換なバーテックスをもつスコット加群に対し、バーテックス上のフュージョン・システムが飽和的となるときに、スコット加群がブラウアー直既約性をもつための必要十分条件を与えた。また、得られた条件が成立する群論的な条件を考察した。これらの研究成果を石岡大樹との共著論文としてまとめ発表した。スコット加群のブラウアー直既約性は、主ブロック間の安定同値を局所部分群の主ブロックの導来同値の張り合わせを用いて構成する際に重要となる概念である。主ブロック間の森田同値・導来同値は安定同値を持ち上げることで得られることが多く、ここで得られた成果はとくに非可換不足群をもつ主ブロック間の森田同値・導来同値構成のために重要な結果であると考えられる。
- (2) ブラウアー樹木多元環の間の導来同値を与える両側傾複体の構成について考察を行った。Rickard(1989,1991) は、2つの多元環が導来同値であることを、ある条件を満たす片側傾複体の存在および、両側傾複体の存在により特徴づけている。両側傾複体を構成することは導来同値の対応を理解するうえで重要である。与えられた片側傾複体と導来圏において同型となる両側傾複体を構成する理論的な方法が Rickard(1991), Keller(1993) により与えられているが、それらの方法に基づいて両側傾複体を具体的に記述することは容易ではなく、これまでに計算例はあまり知られていない。本研究では、ブラウアー樹木多元環において、Rickard(1989) により与えられた片側傾複体に同型となる両側傾複体の具体的な記述を与えた。この研究成果は小境雄太との共著論文にまとめ発表した。有限群のブロックがブラウアー樹木多元環となるのは、巡回不足群をもつ場合である。本研究成果は、例えば巡回シロ一部分群をもつ有限群の自己同型による拡大が非可換メタ巡回シロ一部分群をもつ場合に、その主ブロックとブラウアー対応子の間の導来同値の構成に役立たせることができることが期待され、重要な結果であると考えられる。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 件)

Yuta Kozakai, [Naoko Kunugi](#),  
Two-sided tilting complexes for Brauer tree algebras,  
Journal of Algebra and Its Applications, 17 (2018) No.12, 1850231, 26pp. (査読有)  
DOI:10.1142/S0219498818502316

Hiroki Ishioka, [Naoko Kunugi](#),  
Brauer indecomposability of Scott modules,  
Journal of Algebra, 470 (2017) 441-449 (査読有)  
DOI:10.1016/j.algebra.2016.09.021

Yuta Kozakai, [Naoko Kunugi](#)  
Construction of two-sided tilting complexes for Brauer tree algebras.  
Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 80-83,  
Symp. Ring Theory Represent. Theory Organ. Comm., Yamanashi, 2016 (査読無)

〔学会発表〕(計 3 件)

小境雄太, [功刀直子](#),  
Brauer 樹木多元環の両側傾斜複体について,  
日本数学会秋季総合分科会, 2016年9月, 関西大学

Yuta Kozakai, [Naoko Kunugi](#),  
Construction of two-sided tilting complexes for Brauer tree algebras,  
第48回環論および表現論シンポジウム, 2015年9月, 名古屋大学

石岡大樹, 功刀直子,  
Scott 加群の Brauer 直既約性,  
日本数学会年会, 2015 年 3 月, 明治大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名:  
ローマ字氏名:  
所属研究機関名:  
部局名:  
職名:  
研究者番号(8桁):

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名:  
ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。