様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 １２ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００３１
研究課題名（和文）ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式の解の研究

研究課題名（英文）Study of solutions to the reflection equation associated with dynamical Yang-Baxter maps

研究代表者
澁川　陽一（SHIBUKAWA, Youichi）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：９０２４１２９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の主要な結果は，（１）ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式を定式化したこと，および，（２）ダイナミカル・ブレイスから構成されるダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式の解を構成したことである．この他，組み紐の研究で主要な役割を果たすカンドルを用いてダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成した．さらに，これを利用して弱ホップ代数が得られることも示した．

研究成果の概要（英文）：The main results of this research are: (1) to clarify what the reflection equation associated with dynamical Yang-Baxter maps is; and (2) to construct solutions to the reflection equation associated with the dynamical Yang-Baxter maps from dynamical braces. In addition, we produced dynamical Yang-Baxter maps by means of quandles, which play an important role in the study of links. We showed that these dynamical Yang-Baxter maps give birth to weak Hopf algebras.

研究分野：量子群，ホップ代数，およびそれらの表現論．量子ヤン・バクスター方程式．

キーワード：ダイナミカル・ヤン・バクスター写像　反射方程式　カンドル

１．研究開始当初の背景

（１）J. McGuire と C. N. Yang により初めて定式化された量子ヤン・バクスター方程式は，その後，R. J. Baxter により，格子模型が可解であるための十分条件として再認識された．量子群は，この量子ヤン・バクスター方程式の解である R 行列を構成する道具として，V. G. Drinfeld や M. Jimbo により発見されたものである．
量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式は，上の量子ヤン・バクスター方程式の一般化にあたる．これは，J.-L. Gervais と A. Neveu により定式化されたもので，後に，G. Felder が量子ヤン・バクスター方程式の楕円関数解に付随した代数を構成するために利用した．この代数が楕円量子群である．
上で説明した量子ヤン・バクスター方程式は，行列のテンソル積に関する方程式であるが，ここに現れるテンソル積を集合の直積とみなしても量子ヤン・バクスター方程式は意味を持つ（V. G. Drinfeld）．この方程式の解をヤン・バクスター写像という．この写像を利用することで，様々な離散可積分系を構成することができる．
ダイナミカル・ヤン・バクスター写像は，ヤン・バクスター写像を一般化した写像として，研究代表者により２００５年に導入された．ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の満たす方程式は，ヤン・バクスター写像の場合とは異なり，量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式を少し一般化したものになっている．
ヤン・バクスター写像は，集合全体のなすテンソル圏におけるブレイド関係式の解として定式化することができる．これと同様に，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像は，写像のテンソル積を，通常の直積ではなく少しひねった定義を採用して得られる新たなテンソル圏でのブレイド関係式の解として定式化される．

（２）現在までに，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成する方法がいくつか開発されている．そのうち主要なものは次に掲げる２つである．
①平行四辺形を用いたダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成：３次元ユークリッド空間内の相異なる３点 a, b, c を（この順に）頂点とする平行四辺形を考えると，残りの頂点の座標 d は，d=a−b+c となる（図１参照）．

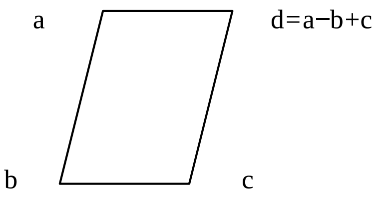

図１．平行四辺形

この３点 a, b, c から点 d への対応（３項演算）を用いるとダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成することができる．研究代表者によるこの構成方法は，ユークリッド空間だけでなく一般のアーベル群にも適用可能である．
②ダイナミカル・ブレイスを用いたダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成：（１）で説明したヤン・バクスター写像は，ブレイスと呼ばれる代数を用いて構成することができる（W. Rump）．K. Matsumoto は，この構成方法をダイナミカル・ヤン・バクスター写像にも適用できるように一般化した．その際利用される構造が，ダイナミカル・ブレイスである．

（３）量子ヤン・バクスター方程式の解である R 行列に関する反射方程式は，境界を伴う量子可積分系の研究に必須であり，数多くの研究がある．V. Caudrelier, N. Crampe, Q. C. Zhang は，ヤン・バクスター写像に関する反射方程式を定式化し，その解の研究を行った．特に，ヤン・バクスター写像とそれに関する反射方程式の解を用いて可換な転送写像の族を構成する方法を提示した．

（４）微分幾何学に現れる対称空間は，対称積と呼ばれる等質空間上の２項演算を用いて特徴付けられる（O. Loos）．M. Kikkawa はこれを一般化して等質系と呼ばれる代数系を定義し，これによりある種の等質空間が特徴付けられることを示した．N. Kamiya と研究代表者は，等質系の一般化である前等質系を定義して，これからダイナミカル・ヤン・バクスター写像が構成できることを示した．
上記対称空間の一般化として，O. Kowalski は Generalized Symmetric Space という概念を提示している．

（５）（１）で説明したように，量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の楕円関数解から楕円量子群を構成することができる．M. Takeuchi と研究代表者は，この構成方法にならい，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から左双亜代数を構成した．さらに，そのダイナミカル表現全体がテンソル圏をなすことも示した．
研究代表者はさらに研究をすすめ，上で構成した左双亜代数がホップ亜代数となるための条件を明らかにし，その条件を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成した．この結果，リジッドなテンソル圏を作り出すことに成功した．

（６）（１）で説明したひねったテンソル圏を利用すれば，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に対しても（３）で説明した反射方程式を定式化でき，これを利用してこのひねったテンソル圏での可換な写像の族も構成できるのではないかと考えた．これが研究開始当初の動機である．

２．研究の目的

（１）ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式を定式化する．

（２）上記反射方程式の解を構成する．
（３）上記反射方程式の解を利用して，１．研究開始当初の背景（１）で説明したひねったテンソル圏での可換な写像の族を構成する．

３．研究の方法

（１）V. Caudrelier, N. Crampe, Q. C. Zhang が定式化したヤン・バクスター写像に関する反射方程式を，そのまま，１．研究開始当初の背景（１）で説明したひねったテンソル圏での方程式と考えることができる．このようにして得られる方程式を，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式と考え，このひねったテンソル圏での方程式を具体的に書き下す．
（２）１．研究開始当初の背景（２）の構成方法を利用して得られるダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式の解を求める．
（３）１．研究開始当初の背景（３）で説明した可換な転送写像の構成方法をテンソル圏の言葉を用いて書き直す．これを利用して，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像およびその反射方程式の解に対しても，（１）で説明したひねったテンソル圏における可換な写像の族を構成する．
（４）１．研究開始当初の背景（４）で説明した O. Kowalski による Generalized Symmetric Space を利用してダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成し，（５）のホップ亜代数（正確には，その重要な例の１つである弱ホップ代数）を得る．

４．研究成果

（１）一般のテンソル圏における反射方程式を定式化することに成功した．加えて，このテンソル圏でのブレイド関係式の解，および，この解に関する反射方程式の解を用いて可換な射の族が構成できることも示した．つまり，２．研究の目的（１）および（３）の一部が達成されたことになる．この成果は，今後，この分野の研究において基本となると考えている．
（２）１．研究開始当初の背景（２）①の構成法によるダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式の解の構成に成功した．しかし，同時に，ここで得られる反射方程式の解が概ね自明なものとなることもわかってしまった．
（３）上記（２）を受けて，１．研究開始当初の背景（２）②で説明した別の構成方法を利用して，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成した．その構成は，概ね K. Matsumoto による方法と同じであるが，少し変形して無駄を省くことで，その後の研究がうまく遂行できるよう工夫している．
そして，ここで得たダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式の解を構成することに成功した（２．研究の目的（２）の達成）．この解は，上記（２）とは異なり非自明なものとなる．（１）の成果により，１．研究開始当初の背景（１）で説明したひねったテンソル圏での可換な写像の族が構成できたことになる（２．研究の目的（３）の達成）．
ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式の解を構成し，これを利用して可換な写像の族を構成するのに成功したのは，本研究が初めてである．
（４）１．研究開始当初の背景（４）で説明した O. Kowalski による Generalized Symmetric Space の代数的部分を一般化して得られる構造を用いて，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成した（N. Kamiya と共同）．得られた成果をまとめる際，本研究で利用した代数構造が，組み紐の研究に現れるカンドルであることに気づいた．今後，組み紐の不変量の研究などと関連することを期待している．
さらに，１．研究開始当初の背景（５）と同様の方法を用いて，上で構成したダイナミカル・ヤン・バクスター写像からホップ亜代数の重要な例の１つである弱ホップ代数を構成することに成功した．
（５）上記（１），（２），（３）の研究成果については，既存の離散可積分系との関連を明らかにした上で，論文にまとめたいと考えている．
（４）の成果については概ね論文にまとめてあり，発表を行った富山大学での研究集会の報告集に投稿する予定にしている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　６　件）
①澁川陽一，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像とカンドル，Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics，２０１７年2月１２日，富山大学理学部（富山県・富山市）
②Youichi Shibukawa, Construction of Hopf algebroids by means of parallelepipeds, Hopf-Algebra Conference in Tsukuba，２０１６年9月１３日，つくば国際会議場（茨城県・つくば市）
③Youichi Shibukawa, Hopf algebroids and dynamical Yang-Baxter map, Tsukuba Mini conference on Hopf algebras and differential Galois theory，２０１５年９月１４日，筑波大学（茨城県・つくば市）
④澁川陽一，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を用いたホップ亜代数の構成，東京無限可積分系セミナー，２０１５年1月２２日，東京大学大学院数理科学研究科（東京都・目黒区）
⑤澁川陽一，Rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter

maps，日本数学会２０１４年度秋季総合分科会，２０１４年9月２５日，広島大学（広島県・東広島市）
⑥澁川陽一，Hopf algebroids associated with dynamical Yang-Baxter maps，日本数学会２０１４年度秋季総合分科会，２０１４年９月２５日，広島大学（広島県・東広島市）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
澁川　陽一（SHIBUKAWA, Youichi）
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：９０２４１２９９