

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400035

研究課題名(和文) ホップ代数を用いたスーパー代数群の研究

研究課題名(英文) Study of super-algebraic groups using Hopf algebras

研究代表者

増岡 彰 (MASUOKA, Akira)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：50229366

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：代数群はスーパー代数群に一般化される。この一般化が重要なのは、標数零の代数閉体上、リジッドなアーベル対称テンソル圏が必ずスーパー代数群の表現圏として実現される(Deligne)からである。この研究の目的は、ホップ代数の方法を用いてスーパー代数群の研究を行なうことである。可換環上のスーパー代数群とハリッシュ-チャンドラ対の圏同値を証明した。応用として、シュヴァレー・スーパー群を、有理整数環上再構成した。体上のスーパー代数群に関して、(i) 可解性、(ii) ベキ零性等の性質を研究した。結果を応用して、研究代表者と天野が与えた一般化ピカル・ヴェシオ理論を、スーパー化できると期待している。

研究成果の概要(英文)：The notion of algebraic groups is generalized by that of algebraic super-groups. This generalization is important, because every rigid abelian symmetric tensor category over an algebraically closed field of characteristic zero is realized as the category of finite-dimensional representations of some algebraic super-group, as was proved by P. Deligne. The project aims at characteristic-free study of algebraic super-groups using Hopf-algebraic methods and techniques. A category equivalence between algebraic super-groups defined over a commutative ring and Harish-Chandra pairs is proved. The result is applied to re-construct the so-called Chevalley super-groups over the ring of integers. For algebraic super-groups over a field, the properties, such as (i) solvability, (ii) nilpotency and (iii) the Chevalley-type decomposition, are investigated. The results will be hopefully applied to establish a super-analogue of the generalized Picard-Vessiot Theory produced by the PI and K. Amano.

研究分野：代数学

キーワード：ホップ代数 スーパー代数群 テンソル圏 ハリッシュ-チャンドラ対

1. 研究開始当初の背景

(1) 代数、リー代数、ホップ代数といった、ベクトル空間の上に、自明な対称性に基づき定義されるオブジェクトは、位数 2 の群  $Z_2$  により次數づけられたベクトル空間の上に、いわゆるスーパー対称性に基づき定義されるオブジェクト (スーパー代数、スーパー・リー代数、スーパー・ホップ代数等) へと一般化される。

(2) Grothendieck ら (SGA3) による関手的見地に立った代数群の定義に倣えば、それをスーパー代数群にただちに一般化できる。スーパー代数群とは、スーパー可換代数の圏上定義された表現可能な群関手のことである。スーパー代数群はそれを表現するスーパー可換ホップ代数と同等になる。これより、前者を研究するのに後者の研究を通して行うことが可能になる。

(3) スーパー代数群の重要性は、Deligne による次の有名な定理 (2002) に求めることができる。標数ゼロの代数閉体上、rigid な対称テンソルアーベル圏で、ある緩やかな条件を満たすものは、あるスーパー代数群上の有限次元スーパー加群圏として実現される。この結果が発表された当時、既にスーパー代数群について多くの研究があったものの、個々の具体的対象の表現に関する結果が殆どで、一般論は十分整備されておらず、その点 1970 年代の Kostant、Koszul に始まるスーパー・リー群論とは大きな隔たりがあった。そこで申請者は 2004 年頃からホップ代数を用いたスーパー代数群の研究を始め、研究開始当初は A. N. Zubkov (ソボレフ数学研究所、ロシア)、柴田大樹 (当時筑波大学博士課程) と共同研究を進めていた。

2. 研究の目的

(1) 前述のとおりスーパー代数群とは代数群の一般化で、群関手として定義されるが、線型代数群のように代数閉体における有理点だけからは決まらない。そのため、それらを表現するスーパー可換ホップ代数を通して研究する方法が有効になる。この方法は単にこの種のホップ代数を考察するにとどまらない。スーパー代数群の無限小たるスーパー・ハイパー代数に帰着するテクニックや、近年量子群の目覚ましい発展に伴い培われた方法を駆使することも含む。この研究の目的は、このようなホップ代数の方法を用いて、(A) 基礎体の標数に依らないスーパー代数群の基礎理論を拡充し、(B) その研究成果を応用することである。

(2) (A)、(B) それぞれにつき 2 つずつ、テーマを具体的に与える。

(A1) 簡約スーパー代数群を特徴づけ、その完全な記述 (ちょうど簡約代数群に対し Chevalley が与えたような) を与える。

(A2) いくつかのスーパー代数群について個々に行われてきたモジュラー表現の研究を、より広いより広いクラスのスーパー代数群に対し包括的に展開する。

(B1) 可換と限らないスーパー・ホップ代数をスーパー可換ホップ代数の変形として実現する。

(B2) 微分・差分統一 Picard-Vessiot 理論をスーパー化する。

3. 研究の方法

主に次の 3 つの方法を用いる。

(I) スーパー代数群と圏同値をなす Harish-Chandra ペアの考察に帰着させる。(基礎体を可換環に一般化する場合、または任意標数の解析的状况においては、この圏同値は証明されていないため、その証明自体が 1 つの目的になる。)

(II) スーパー代数群  $G$  の性質をよく反映するスーパー・ハイパー代数  $hy(G)$  を考察する。

(III) スーパー代数群の  $Z$  形式 ( $Z$  は有理整数環) を通して異標数の結果を移送し合う。

4. 研究成果

(1) 柴田大樹との共著論文 Algebraic supergroups and Harish-Chandra pairs over a commutative ring の成果を報告する。

2-トーション元を含まない可換環上定義されたスーパー代数群と Harish-Chandra ペアとの圏同値を示し、それを応用して、いわゆる Chevalley スーパー代数群の  $Z$  形式を再構成した。また、スーパー代数群の、ある広いクラスに対し、その表現圏の記述を、付随するスーパー・ハイパー代数を用いて行った。

(2) A. Zubkov との共著論文 Solvability and nilpotency for algebraic supergroups の成果を報告する。

標数が 2 と異なる体上のスーパー代数群  $G$  について、(i) 可解性、(ii) ベキ零性、(iii) Chevalley 型分解、といった性質を明らかにした。例えば  $G$  が性質 (i) をもつためには、付随する通常の代数群  $G_{ev}$  が同じ性質をもつことが必要十分。また、基礎体の標数が零の場合、 $G$  のベキ単根基による商が線形簡約であれば (iii) の分解が成り立つ。

微分・差分統一 Picard-Vessiot 理論のスーパー化はまだ達成できていないが、この論文の成果を応用して近い将来叶うものと期待される。

(3) C. Kassel との共著論文 The Noether problem for Hopf algebras の成果を報告する。

有限群  $G$  は、それによって添え付けられた変数  $t_g$  が生成する有理関数体  $R = k(t_g; g \in G)$  の上に自然に作用する。Noether 問題とは不変体  $R^G$  が基礎体  $k$  上超越的か否かを問うものである。この問

題を、 $G$  を有限次元ホップ代数  $H$  に一般化して定式化し、基礎体の標数が例で  $H$  が点状 (pointed) であれば答えが肯定的であることを示した。

(4) 石井敦との共著論文 Handlebody-knot invariants derived from unimodular Hopf algebras の成果を報告する。ハンドル絡み目の新しい不変量を、量子可換量子対称代数という概念を導入して構成した。そのような代数が有限次元ユニモジュラーホップ代数から自然に構成できることを示し、絡み目を鏡映すると不変量が複素共役になるような、興味深いホップ代数の例を与えた。

(5) N. Andruskiewitsch らとの共著論文 Lifting via cocycle deformation の成果を報告する。 $A$  をホップ代数で、その余根基  $H$  が部分ホップ代数であるようなものとする。例えば量子展開環を重要な例として含む点状ホップ代数はこの仮定を満たしている。 $A$  をその余根基フィルターによって次数化すると、次数つきホップ代数  $gr A$  が得られる。この  $gr A$  は、 $A$  に比べはるかに捉えやすく、多くの場合 Nichols 代数  $B(V)$  のボゾン化  $B(V)\#H$  の形をしている。いま、 $B(V)\#H$  から  $A$  がどう復元できるか、という問題を考える。多くの場合、 $A$  は  $B(V)\#H$  の 2 コサイクル変形として与えられる。 $B(V)\#H$  の 2 コサイクル変形をすべて求める組織的方法について論じ、その方法をいくつかの具体例に対して実践したのがこの論文である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

(3) 増岡彰, 柴田大樹, Algebraic supergroups and Harish-Chandra pairs over a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2017), no.5, 3443–3481.

増岡彰, A. Zubkov, Solvability and nilpotency for algebraic supergroups, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), no.2, 339–365.

C. Kassel, 増岡彰, The Noether problem for Hopf algebras, J. Noncommut. Geom. 10 (2016), no. 2, 405–428.

石井敦, 増岡彰, Handlebody-knot invariants derived from unimodular Hopf algebras, J. Knot Theory Ramifications 23 (2014), no. 7, 1460001, 24 pp.

N. Andruskiewitsch, I. Angiono, A. Garcia Iglesias, 増岡彰, C. Vay, Lifting via cocycle deformation, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), no. 4, 684–703.

[学会発表](計 5 件)

増岡彰, Super Lie groups over a complete field of arbitrary characteristic, Workshop on Hopf algebras and tensor categories, Chern 数学研究所, 南海大学, 中華人民共和国 天津, 2016 年 9 月 6 日.

増岡彰, Hopf crossed products and their applications to super algebraic groups, Humboldt Kolleg Colloquium on Algebras and Representations--Quantum 2016, アルゼンチン国立コルドバ大学, 2016 年 3 月 4 日.

増岡彰, The Miyashita action in Hopf-Galois theory, Conference of Ring Theory in Honor of Professor George Szeto on the Occasion of his Retirement, 岡山大学, 2015 年 11 月 14 日.

増岡彰, Hopf-algebraic approach to super affine groups, BIRS ワークショップ: Nichols Algebras and Their Interactions with Lie Theory, Hopf Algebras and Tensor Categories, Banff 国際研究ステーション, カナダ, 2015 年 9 月 9 日.

増岡彰, Clefthness for universal quantum groups, Moni-workshop on Infinite-Dimensional Hopf Algebras, Oberwolfach 数学研究所, ドイツ, 2014 年 4 月 9 日.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/akira298math/>

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

増岡彰 (MASUOKA, Akira)  
筑波大学・数理物質系・准教授  
研究者番号: 50229366

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

( )

研究者番号:

(4) 研究協力者

柴田 大樹 (SHIBATA, Taiki)

岡山理科大学 理学部・助教  
研究者番号：