2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００３６

研究課題名（和文）導来圏におけるゴレンシュタイン次元

研究課題名（英文）Gorenstein dimension in Derived categories

研究代表者
星野　光男（HOSHINO, Mitsuo）

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：９０１８１４９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：Ａを十分多くの射影対象を持つアーベル圏，ＰをＡの射影対象全体の成す充満部分圏，ＧをＡのゴレンシュタイン射影対象全体の成す充満部分圏とする．このとき以下を示した：上下に有界なＡ上の鎖複体Ｘが有限のゴレンシュタイン次元を持つためには，上下に有界なＡ上の導来圏においてある上下に有界なＧ上の鎖複体と同型になることが必要十分である；上下に有界なＡ上の導来圏において，有限のゴレンシュタイン次元を持つ鎖複体全体の成す充満部分圏は実際に部分三角圏である；ＧのＰによる剰余圏と，有限のゴレンシュタイン次元持つ鎖複体全体の成す三角圏を有限の射影次元を持つ鎖複体全体の成す部分三角圏で割った商とは圏同値である．

研究成果の概要（英文）：Let A be an abelian category with enough projectives, P the full subcategory of A consisting of projective objects, and G the full subcategory of A consisting of Gorenstein projective objects.In this setting, we showed that a bounded complex X over A has finite Gorenstein dimension if and only if X is isomorphic to some bounded complex over G in the derived category of bounded complexes over A, that in the derived category of bounded complexes over A the full subcategory consisting of complexes of finite Gorenstein dimension is really a triangulated category, and that the residue category of G over P is equivalent to the quotient category of the triangulated category of chain complexes of finite Gorenstein dimension over the triangulated subcategory of chain complexes of finite projective dimension.

研究分野：代数学

キーワード：導来圏　ゴレンシュタイン次元　アウスランダー・ゴレンシュタイン環　フロベニウス拡大

１．研究開始当初の背景
ネター環上の有限生成加群に対するゴレンシュタイン次元の概念は１９６９年にアウスランダー・ブリッジャーによって導入されたもので，有限生成右加群圏と有限生成左加群圏との間の環自身による双対理論と関係する．導来圏の言葉に翻訳すると，有限生成右加群圏上の有界な鎖複体が有限のゴレンシュタイン次元を持つとは，１）環自身による双対関手の右導来関手（以下，導来双対関手と呼ぶ）を作用させたとき，有限生成左加群圏上の有界な鎖複体に移り，２）更に導来双対関手を作用させたとき，自然にもとの鎖複体と同型になることである．ここで，加群は０次に凝縮した鎖複体とみる．有限のゴレンシュタイン次元を持つ加群については，導来双対関手を作用させたときに消滅しないホモロジーの上限をゴレンシュタイン次元と呼ぶ．体の場合を考えれば明らかであるが，一般に有限生成でない加群は上の条件２）をみたさない．従って，任意の加群に対してゴレンシュタイン次元の概念を導入するためには，双対理論から離れる必要があった．即ち，有限のゴレンシュタイン次元を持つ鎖複体の双対理論を使わない特徴付けを与える必要があった．

２．研究の目的
先ず，任意の環（単位元を持ち結合律をみたす）に対して，
（１）その上の右加群全体からなるアーベル圏（以下，加群圏と呼ぶ）上の上下に有界な鎖複体からなる導来圏（以下，有界な導来加群圏と呼ぶ）において「有限のゴレンシュタイン次元を持つ鎖複体」の概念を導入し，
（２）それらの鎖複体全体のなす有界な導来加群圏の充満な部分三角圏を定義する．
次に，与えられた２つの環に対して，
（３）有限のゴレンシュタイン次元を持つ鎖複体からなる部分三角圏同士が何時三角圏として圏同値になるかを探ることにより，導来同値の理論を進展させた．

３．研究の方法
研究代表者の星野は研究全体を統括した．関連する分野の研究者（大学院生を含む）を適宜呼んでセミナーを開催し，講演を依頼するとともに，こちらからも先方の研究セミナーに出向いて講演を行う等，研究打ち合わせを綿密に行い，専門的知識・最新情報の提供を受けた．さらに，国内外の研究集会に積極的に参加し，成果発表・情報収集を行い，関連分野の研究者との研究討論を活発に行った．そのために，研究経費としては旅費を重視した．

４．研究成果
Ｉ．研究代表者の星野は研究協力者の古賀（東京電機大）との共同研究によって以下の結果を得た．
（１）Ａを十分多くの射影対象持つアーベル圏とし，ＰをＡの射影対象全体からなるＡの充満部分圏とする．また，Ａのゴレンシュタイン射影対象全体からなるＡの充満部分圏をＧとする．この設定の下で，次を示した．
①上下に有界なＡ上の鎖複体Ｘが有限のゴレンシュタイン次元を持つためには，上下に有界なＡ上の導来圏において，ある上下に有界なＧ上の鎖複体と同型になることが必要十分である．
②上下に有界なＡ上の導来圏において，有限のゴレンシュタイン次元を持つ鎖複体全体からなる充満部分圏は実際に部分三角圏である．
③ＧのＰによる剰余圏と，有限のゴレンシュタイン次元を鎖複体全体からなる三角圏を有限の射影次元を持つ鎖複体全体からなる部分三角圏で割った商圏とは圏同値である．

（２）Ａ，Ｂを共に十分多くの射影対象を持つアーベル圏とするとき，次を示した．
①上下に有界なＡ上の導来圏と上下に有界なＢ上の導来圏の間にある条件をみたす三角圏としての圏同値が与えられたとき，その圏同値は有限のゴレンシュタイン次元を持つ鎖複体全体からなる部分三角圏同士の間に圏同値を誘導する．
②有限のゴレンシュタイン次元を持つ鎖複体全体からなる三角圏同士の間にある条件をみたす（加群圏同士の場合は常にみたされる）三角圏としての圏同値が与えられた時，Ａ，Ｂが共にグロタンディックの公理ＡＢ４をみたせば，その圏同値有限の射影次元を持つ鎖複体全体からなる部分三角圏同士の間に三角圏としての圏同値を誘導する．

（３）環の自己移入性との関連において，任意の環に対するホモロジー代数的条件：
（Ｐ）任意の移入加群の任意の射影加群による拡大群は十分大きな次数で消滅する
を導入し，
①導来同値な２つの環Ａ，Ｂに対して，ＡがP条件（Ｐ）をみたすこととＢが条件（Ｐ）をみたすこととは同値であることを示した．
②また，アルティン環Ａについて，Ａが条件（Ｐ）をみたすこととＡの反転環が条件（Ｐ）をみたすこととは同値であることを示した．
③さらに，応用として，アルティン代数に対して，その自己移入次元（もしくは，大域次元）の有限性を条件（Ｐ）を用いて特徴付けた．

これら３つの成果は一編の論文に纏めて国外の学術誌（査読有）に発表する．

II．研究代表者の星野は研究協力者の亀山

（サレジオ高専），古賀（東京電機大）との共同研究によって以下の結果を得た．
（１）アウスランダー．ゴレンシュタイン局所環，即ち，ネター局所環（可換性は仮定しない）でアウスランダー条件をみたしかつ左右で有限の自己移入次元を持つものについての研究を行い，アウスランダー．ゴレンシュタイン局所環のフロベニウス拡大環はまたアウスランダー．ゴレンシュタイン局所環であること示し，それによって，アウスランダー．ゴレンシュタイン局所環を組織的かつ大量に構成する方法を与えた．
具体的には，ｎを２以上の整数とし，Ｉを０からｎ－１までの整数の集合とする．このとき，Ｉの巡回置換（０，１，…，ｎ−１）はＩに０を単位元とする巡回郡の構造を定義する．ここで先ず，任意に与えられた局所環から出発して，Ｉ-次数付局所環を構成する．次に，整数ｑと関数χ: Ｉ→Ｚの組（ｑ，χ）である条件をみたすものを用意して２変数関数ω：Ｉ×Ｉ→Ｚを構成する．ここで，環Ｒを任意に固定し，Ｒの環自己同型σとＲの２つの元ｃ，ｔの組（σ，ｃ，ｔ）である条件をみたすものを用意して，Ｒ上のＩ−次数環Ａを構成すると，ＡはＲのフロベニウス拡大環になり，ある２種類の条件の下では，Ａがアウスランダー・ゴレンシュタイン局所環であることとＲがアウスランダー・ゴレンシュタイン局所環であることとが同値になる．

（２）任意の環および任意の有限群から出発して，その群で次数付けらかつ各次数で右加群としてランク１の自由加群である様な拡大環を構成し，それがフロベニウス拡大になるための必要十分条件を与えた．
具体的には，単位元ｅを持つ有限乗法群Ｉを任意に固定，Ａを任意のＩ−次数環とする（群環とは限らない）．次に，ΛをＩを基底集合に持つ自由右Ａ−加群とし，適当な公理によってΛに環構造を定義すればΛはＡのフロベニウス拡大環となる．また，群ＩはΛに右から作用してその固定部分環がＡとなる．このとき，ある条件の下では，Ａがアウスランダー・ゴレンシュタイン環であることとΛがアウスランダー・ゴレンシュタイン環であることとが同値になる．

（３）クリフォード代数の概念を一般化し，ある条件をみたす環から出発して，特殊なフロベニウス拡大を帰納的に構成する方法を与えた．このクラスは特別な場合としてクリフォード代数を含む．
具体的には，２以上の整数ｎを固定して，Ｉ＝{0，1，...，ｎ－1} とする（Ｉは位数ｎの巡回群見なせる）．また，環Ｒと，ある条件をみたすＲの環自己同型σ，Ｒの元ｃの組（σ，ｃ）を固定する．ΛをＩの元で添字を付けられた基底を持つ自由右Ｒ−加群とし，適当な公理によってΛに環構造を定義する．CおのときΛはＲの分裂フロベニウス拡大環となり，ｃがＲのジャコブソン根基に属すと云う仮定の下で，Λが局所環であることとＲが局所環であることは同値となる．更に，Λの環自己同型とΛの元の組で上と同じ条件をみたすものが存在し，上の構は何度でも繰り返せることになる．つまり，帰納法に乗るのである．特にｎ＝２の場合を考えると，各ステップで環自己同型の取り方が非常に明快になり，帰納法に乗せやすくなる．

これら３つの成果はそれぞれ一編の論文として国外の学術誌（査読有）に出版済みである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）
①M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Clifford extensions”, Comm. Algebra 44(4), 1695-1703 (2016). DOI:10.1080/00927872.2015.1027392.
査読有
②M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Construction of Auslander-Gorenstein local rings as Frobenius extensions”, Colloq. Math. 141, 1-11 (2015). DOI: 10.4064/cm141-1-1.
査読有
③M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Group-graded and group-bigraded rings”, J. Algebra Appl. Vol. 14, No. 07, 2015. DOI:10.1142/S0219498815501005
査読有

〔学会発表〕（計　３　件）
①M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “On modules of infinite reduced grade”, 第４９回環論および表現論シンポジウム，大阪府立大学中百舌鳥キャンパス(大阪府堺市)，２０１６年８月３１日(８／３１～９／３).
②M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Crossed products for matrix rings”, 第４８回環論および表現論シンポジウム，名古屋大学 (愛知県名古屋市)，２０１５年9月7日（９／７～９／１０）
③M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Dualities in stable categories”, 第４７回環論および表現論シンポジウム，大阪市立大学，２０１４年9月１４日（９／１３～９／１５）

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）
名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０　件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
特になし

６．研究組織
(1)研究代表者
　星野　光男（HOSHINO, Mitsuo ）
　筑波大学・数理物質系・講師
　研究者番号：９０１８１４９５

(2)研究協力者
　亀山　統胤（KAMEYAMA, Noritsugu）
　サレジオ工業高等専門学校・一般教育科・
助教
　研究者番号：００７８００２４

　古賀　寛尚（KOGA, Hirotaka ）
　東京電機大学・情報環境学部・助教
　研究者番号：３０７３６７２３