様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００３８

研究課題名（和文）加群のベキ乗とそのサチュレイションの研究

研究課題名（英文）Research on the powers of modules and their saturation

研究代表者
西田　康二（Nishida, Koji）

千葉大学・統合情報センター・教授

研究者番号：６０２２８１８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：局所環R上の加群Mから定まるリース代数R(M)のサチュレイションを考察した。Mが有限生成なR-自由加群の準同型写像fの余核として現れるようなものであれば、fに関する適当な仮定の下でR(M)のサチュレイションの斉次部分の自由分解を構成できることを確かめた。環Rのイデアルも考察の対象としたが、階数が1のR-自由加群の部分加群であるという見方を重視する為に、記号的リース代数の研究でよく扱われる「素イデアル」という枠組みには拘らずに研究を行った。その結果、3次元正則局所環の素イデアルが定める記号的リース代数のネータ性に関するHunekeの判定法を一般化することができ、興味深い応用を発見した。

研究成果の概要（英文）：We studied the saturation of the Rees algebra R(M) of a module M over a local ring R. If M is an R-module appearing as the cokernel of a homomorphism of finitely generated free R-modules, putting suitable assumption on f, we could describe an acyclic complex concretely which gives an R-free resolution for a homogeneous component of the saturation of R(M). We considered the ideals of R as the objects of our research. In order to place emphasis on the point of view that ideals are submodules of rank one free modules, we avoided putting the assumption that the ideals are prime, which is common in the study on symbolic Rees algebras. As a consequence, we could generalize the Huneke's criterion on the Noetherian property of the symbolic Rees algebras of prime ideals in 3-dimensional regular local rings, and we found an interesting application.

研究分野：可換環論

キーワード：可換環　記号的べき乗　記号的リース代数

１．研究開始当初の背景

ネータ環Ｒのイデアル I の記号的ｋ乗 $I^{(k)}$ とは、通常のベキ乗 I^k の極小素因子に対応する準素成分たちの共通部分である。すなわち、Ｒの素イデアルＰに対して I^k を R_P に拡大してからＲに引き戻して得られるイデアルを $J(P, I^k)$ と表し、剰余環Ｒ／ＩのR-加群としての極小素因子の集合 $\mathrm{Min}(R/I)$ の元全体を $P_1, P_2, \cdots, P_r$ とすると

$$I^{(k)} = J(P_1, I^k) \cap J(P_2, I^k) \cap \cdots \cap J(P_r, I^k)$$

が成り立つ。任意の整数ｋ，ｅに対して $I^{(k)}$ と $I^{(e)}$ の積は $I^{(k+e)}$ に含まれることから、記号的リース代数と呼ばれる次数付環

$$R_S(I) = R \oplus I^{(1)} \oplus I^{(2)} \oplus I^{(3)} \oplus \cdots$$

が定まる。この $R_S(I)$ がいつネータ環になるか？という問題は、可換環論における重要な研究テーマの一つであり、多くの未解決問題が残されている。実は、与えられたイデアルに対して記号的ベキ乗を実際に求めることはかなり難しい作業である為、多くの計算例は (R, m) が局所環で剰余環Ｒ／Ｉの次元が１の場合に見出されてきた。実際、その様な状況では、十分大きな整数ｓに対して

$$I^{(k)} = I^k : m^e = \{ x \in R \mid xm^e \subseteq I^k \}$$

が成り立つ為、計算が比較的容易になるのである。一方、Ｒ／Ｉの次元が２以上の場合であっても、$I^k : m^e$ は十分大きなｅに対して一定のイデアルとして確定する。これが I^k のサチュレイションと呼ばれるイデアルであり、ここでは $\mathrm{sat}(I^k)$ で表わすことにする。実は、R/I^k の随伴素因子の集合 $\mathrm{Ass}(R/I^k)$ の元でｍと異なるものの全体を $Q_1, Q_2, \cdots, Q_s$ とすると

$$\mathrm{sat}(I^k) = J(Q_1, I^k) \cap J(Q_2, I^k) \cap \cdots \cap J(Q_s, I^k)$$

なる等式が成り立ち、良く知られている様に $\mathrm{Min}(R/I)$ は $\mathrm{Ass}(R/I^k)$ の部分集合であるから、$\mathrm{sat}(I^k)$ は I^k と $I^{(k)}$ の中間に位置するイデアルとなる。さらに、$I^k = \mathrm{sat}(I^k)$ が成り立つことと

$$\mathrm{depth}(R/I^k) > 0$$

は同値であって、$\mathrm{sat}(I^k) = I^{(k)}$ となる為には

$$\mathrm{Ass}(R/I^{(k)}) \subseteq \{ m \} \cup \mathrm{Min}(R/I)$$

の成立（Ｒ／Ｉの次元が１の場合にはこの条件が自明にみたされる）が必要十分であることも容易に示される。そして、任意の整数ｋ，ｅに対して $\mathrm{sat}(I^k)$ と $\mathrm{sat}(I^e)$ の積はやはり $\mathrm{sat}(I^{k+e})$ に含まれるから、$R_S(I)$ とは別に次数付環

$$R(I)^{\mathrm{sat}} = R \oplus \mathrm{sat}(I) \oplus \mathrm{sat}(I^2) \oplus \mathrm{sat}(I^3) \oplus \cdots$$

を考察することが意味を持ってくる。すると、基本的な課題として
「$\mathrm{sat}(I^k)$ を効率的に計算する方法を見出し、$R(I)^{\mathrm{sat}}$ のネータ性について実用的な判定法を与えよ」
という要請が自ずと生じてくる訳であるが、その課題に対して得られる成果からは、記号的リース代数の研究へのフィードバックも期待できると予想された。

一方、上で述べた内容とは別方向の研究ではあるが、可換環上の加群に対してリース代数を定義し、その構造を解析するという試みも行われていた。ネータ環Ｒ上の有限生成自由R-加群Ｆが与えられたとき、Ｆの自由基底 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ をとれば、対称代数 $S(F)$ は $t_1, t_2, \cdots, t_r$ を変数とするＲ上の多項式環になる。するとＦのR-部分加群Ｍに対して、Ｍで生成される $S(F)$ のR-部分代数 $R(M)$ が定まる。これをＭのリース代数と言う。Ｆの階数が１（すなわち $r = 1$）の場合には、イデアルのリース代数として良く知られている概念と確かに一致するのである。さらに、自然数ｋに対して $S(F)$ のｋ次斉次式全体（すなわちＦのｋ次対称冪）を $S_k(F)$ と書くことにすれば、Ｍのｋ乗 M^k が $S_k(F)$ のR-部分加群として定まる。このようにして加群のベキ乗が考えられるようになった結果、イデアルの性質を調べる上で有効な道具として使われてきた reduction、analytic spread、ヒルベルト関数、重複度といった概念や不変量が加群に対しても導入され、活発に研究されるようになってきたいた。

２．研究の目的

「研究開始当初の背景」で述べた２方向の研究は、加群のベキ乗のサチュレイションに関する研究として自然に合流する。(R, m) が局所環の場合には、有限生成R-自由加群Ｆの R-部分加群Ｍに対して $\mathrm{sat}(M^k)$ を

$\{ f \in S_k(F) \mid e \gg 0$ に対して $m^e f \subseteq M^k \}$

として定義することができる。イデアルの場合と同様に、F 内における M^k の準素分解を用いて $sat(M^k)$ を記述することができ、それを含む形で記号的 k 乗 $M^{(k)}$ を定めることも可能である。この研究では、$sat(M^k)$ を具体的に計算する方法を模索し、次数付環

$$R(M)^{sat} = R \oplus sat(M) \oplus sat(M^2) \oplus sat(M^3) \oplus \cdots$$

のネータ性の考察に向けた糸口を見出すことを目的とした。可換環論における重要な研究テーマの一つである記号的リース代数のネータ性の問題に対してより広い枠組みを与えることにより、この分野の未解決問題に取り組む為の新しいアプローチが得られるのではないかと期待したのである。

３．研究の方法

以下に述べるような 2 種類の R-加群を対象として考察を進めてみた。

まずは、R-自由加群の準同型写像の余核として現れる様な R-加群を扱った。R に成分を持つ m ×n 行列 $A = (a_{ij})$ をとり、その転置行列 ${}^tA$ が定める準同型写像 $R^m \to R^n$ の余核を M とする。$e_1, e_2, \cdots, e_n$ を R^n の標準基底とすると、R^n の対称代数 $S(R^n)$ は $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を変数とする R 上の多項式環となり、さらにその多項式環を

$$f_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n$$

$(i = 1, 2, \cdots, m)$ なる 1 次式たちが生成するイデアルで割った剰余環は M の対称代数 $S(M)$ と一致する。従って $f_1, f_2, \cdots, f_m$ が $S(R^n)$ の正則列となるような条件を A に課せば、Koszul 複体を考えることにより、$S(M)$ の $S(R^n)$-加群としての自由分解が得られる。一方、M が適当な R-自由加群 F に埋め込める様な状況では、M のリース代数 $R(M)$ は $S(M)$ を R-加群としての捻じれ部分で割った剰余加群と一致することが知られており、A に対してさらに強い条件を課せば、$S(M)$ の捻じれ部分が無くなり、$R(M)$ と $S(M)$ が同型になる（このような M は linear type であると言われる）。すると、$R(M)$ の $S(R^n)$-加群としての自由分解が分かることになり、k 次斉次部分に注目すれば、M^k の R-加群としての自由分解が得られるという仕組みになっているのではないかと考えたのである。加群の自由分解は、その加群についての多くの情報を有しており、そこから $sat(M^k)$ の性質を引き出すことは十分に可能である。

次に、加群版への拡張を視野に入れて、R のイデアルも考察の対象とした。階数が 1 の R-自由加群の部分加群であるという見方を重視する為に、記号的リース代数の研究で良く扱われる「素イデアル」という枠組みには拘らないようにした。イデアル I に対する $R_S(I)$ や $R(I)^{sat}$ については（特に I が素イデアルの場合に）ある程度の既知の結果があるので、それらの拡張を考察していけば、$R_S(M)$ や $R(M)^{sat}$ の研究の方向性を定められるのではないかと期待した。

４．研究成果

この研究で得られた成果を年度ごとに分けて以下に述べる。

平成 26 年度の研究：

最初の年度の研究として

(1) 関連する既知の結果の見直し と

(2) 実例の解析に向けた準備

を行った。

(1)については Huneke の判定法を主に考察した。それは 3 次元正則局所環 R の高さが 2 の素イデアル P に対して定まる記号的リース代数 $R_S(P)$ がネータ環になるかどうかを調べる為の方法である。Huneke の判定法を「R が 3 次元 Cohen-Macaulay 環で R / I が 1 次元 Cohen-Macaulay 環」という枠組みに一般化できることは既に確認していたのだが、高次元化や加群版への拡張を視野に入れて、証明の見直しを行った。オリジナルな証明は Hilbert 関数を巧妙に利用していて魅力的なものではあるのだが、何故その方法で証明できるのか？という部分が良く見えないという側面も持っている。そこで、より自然な手

順で証明する方法を模索したのであるが、幸い、イデアルの節減を用いた depth の評価と局所化の議論により、より簡明な証明を得ることができた。

(2)については自由 R-加群の準同型写像 f:F → G の余核として現れるような R-加群 M を主に考察した。主結果は「f に適当な条件を付けると、M のリース代数は G の対称代数（これは R 上の多項式環になる）をある正則列で割った剰余環になる」というものである。この状況では、Kosuzul 複体を考えることにより、G の対称代数上で M のリース代数の次数付自由分解を与えることができる。すると、その分解の斉次部分に注目することにより、M のべき乗の R-加群としての自由分解が得られるのである。すると、非輪状複体の変形を行って $\mathrm{sat}(M^k)$を計算することが理論的には可能になる。

平成 27 年度の研究：

標数が 0 の体 K 上の 3 変数多項式環 R = K[x, y, z]には、高さ 2 の素イデアル P で記号的リース代数 Rs(P)がネータ環にならないようなものが存在することは 90 年代半ばに行った共同研究で知っていたのだが、幾何学的な方法でそのような例を豊富に構成するするという最近の研究成果を知るに至り、我々の方法を見直してみることにした。ただし、この研究課題の観点を踏まえ、イデアルが素であるという事には固執せず、高さが 2 という仮定のみで考察を進めてみた（この状況は、階数が 1 の自由加群においてシンボリックなべき乗が通常のべき乗のサチュレイションに一致するような部分加群を扱っていることになる）。その結果、従来のものとは全く異なる性質を持つイデアルを見出すことができた。これまでに知られていた例は全て negative curve を定義するような「良い元」をイデアル自身の生成元の一つとして含んでいるのだが、今回発見した例は、イデアルの生成元の中には negative curve は存在せず、2 次のシンボリック冪の中に初めて出現するようなものになっている。主結果は次のように述べられる：

正整数 a, a’, b, b’ を $1 < a'/a < 5/4$ かつ $2 < b'/b < (17a - 10a')/(6a - 3a')$ となるように取り、第 1 行が（x^a　$y^{b'}$　z）で第 2 行が（y^b　z　$x^{a'}$）であるような 2×3 行列の極大小行列式で生成される R のイデアルを I とする。このとき記号的リース代数 Rs(I)はネータ環にはならない。

この I は素イデアルとは限らないが、3 つの整数 $b' + 2b$, $a' + 2a$, $ab' + a'b + a'b'$ の最大公約数が 1 となる場合には、これらの整数から定まる space monomial curve の定義イデアル（従って素イデアル）に一致する。最も単純な例としては $a = 5$, $a' = 6$, $b = 24$, $b' = 49$ が挙げられる。証明は標数 $p > 0$ の場合への移行が鍵となる。イデアル I の生成元は整数係数の多項式環の元であるから、標数 p の素体上の多項式環での像を考えることができる。そこでは、記号的リース代数はネータ環になるのだが、必要な生成元の次数が p に従って際限なく大きくなる為、標数が 0 の体 K 上で Rs(I)の非ネータ性が従うのである。

平成 28 年度の研究：

前年度の研究で得た成果を論文として纏める為に、記号的リース代数のネータ性を調べる方法として良く知られている「Huneke の判定法」と、基礎環上で有限生成にならない（従ってネータ環にならない）記号的リース代数を与える為の有力な方法として知られている ″mod p reduction″ の手法を再検証してみた結果、その証明を大幅に簡略化する事が出来、加群の場合に理論を拡張する事も見通しが良くなったと感じられた。この年度の研究では、体 K の 3 変数多項式環 S = K[x, y, z]の斉次イデアル I で次の 3 条件：

(1) xS + I は (x, y, z)S-準素である。

(2) S/I の随伴素因子は極小素因子のみ。

(3) I をその極小素因子で局所化すると 2 元で生成される。

をみたすものを考察の対象とした。最初の条件にある x を y や z に取り換えても同様の理論を構成する事が出来るので、S における高さ 2 の素イデアルは I の典型的な例となり、space monomial curve の定義イデアルに対しても理論を適用する事が可能である。

平成29年度の研究：

一般化された Huneke の判定法を適用することにより、射影平面の点集合を定義するイデアルの記号的リース代数の有限生成性を調べた。特に、体K上の多項式環 $S=K[x,y,z]$ において

$$x(y^n - z^n),\ y(z^n - x^n),\ z(x^n - y^n)$$

が生成するイデアル I（ここで n は正整数である）に的を絞って調べてみた。体 K が原始 n 乗根を含む場合には、このイデアル I は射影平面の $3+n^2$ 個の点を定義するものであり、その記号的リース代数が有限生成になることは既に知られていたのだが、そこで用いられた方法は計算機の助けを借りながら力ずくで証明するというものであり、理論的な観点からは興味が薄いという印象を受けていた。Huneke の条件をみたす2つの元を如何にして見出すかが問題であったのだが、n が 4 以上の場合には2つの元のどちらかが斉次元にはならないはずであるという事実から発見に至ることができた。Huneke の判定法では、基礎環を局所環とするのだが、その仮定の必要性を説明する上でも重要な例となるのではないかと思う。

上記のイデアル I は第1行に x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1} が並び、第2行に yz, xz, xy が並んでいる様な 2×3 行列 A の極大小行列式で生成され、I の3つの生成元が定める S^3 から S への準同型写像の核 M は A の列ベクトルで生成されることが分かる。今後の研究テーマとして S^3 の部分加群 M のリース代数を調べるという問題を認識できた事は大きな収穫であった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計3件）

① Kazuhiko Kurano and Koji Nishida, Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves, Michigan Mathematical Journal, 査読有, 掲載予定, 2018.

② Kosuke Fukumuro, Hirofumi Kume and Koji Nishida, On modules of linear type, Acta Mathematica Vietnamica, 査読有, Vol. 40, 2015, 101-110, DOI: 10.1007/s40306-015-0116-1.

③ Kosuke Fukumuro, Taro Inagawa and Koji Nishida, Saturations of powers of certain determinantal ideals, Journal of Commutative Algebra, 査読有, Vol. 7, 2015, 167-187, DOI: 10.1216/JCA-2015-7-2-167.

〔学会発表〕（計2件）

① 西田 康二, On the symbolic Rees rings of Fermat ideals, 第39回可換環論シンポジウム, 2017年11月15日, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市）.

② Koji Nishida, On a method for constructing non-Noetherian symbolic Rees algebras, International Conference and 8-th Japan Vietnam joint Seminar on Commutative Algebra, 2016年3月24日, Institute of Mathematics, Vietnam academy of Science and Technology (Ha Long, Vietnam)

６．研究組織

(1) 研究代表者

西田　康二（NISHIDA, Koji）

千葉大学・統合情報センター・教授

研究者番号：60228187

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

蔵野 和彦（KURANO, Kazuhiko）

明治大学・理工学研究科・教授

研究者番号：90205188

(4) 研究協力者

福室 康介（FUKUMURO, Kosuke）

稲川 太郎（INAGAWA, Taro）

久米 弘文（KUME, Hirofumi）

磯部 遼太郎（ISOBE, Ryotaro）

神代 真也（KUMASHIRO, Shinya）