様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　6 月　6 日現在

機関番号：１２６１３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００４０

研究課題名（和文）パラフェルミオン代数を用いたコード頂点作用素代数の研究

研究課題名（英文）Research on code vertex operator algebras using parafermion algebras

研究代表者
山田　裕理（YAMADA, Hiromichi）

一橋大学・　・名誉教授

研究者番号：５０１３４８８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：階数1のA型レベルkのパラフェルミオン頂点作用素代数は、階数1のA型アフィンリー代数のレベルkの可積分表現におけるハイゼンベルグ代数のコミュタントとして定義されるC2余有限で有理的な頂点作用素代数である。この頂点作用素代数にはk個のsimple currentがあり、それらのフュージョン規則は位数kの巡回群の対称性を持つ。Zk上のコードを用いてk個のsimple currentを組み合わせることにより、C2余有限で有理的な新しい系列の頂点作用素代数を構成した。

研究成果の概要（英文）：A rank 1, type A, level k parafermion vertex operator algebra is defined as the commutant of the Heisenberg algebra in the integrable representation of a rank 1, type A affine Lie algebra at level k, which is a C2-cofinite and rational vertex operator algebra. The parafermion vertex operator algebra has k simple currents and there is a Zk-symmetry in the fusion rules among them. Using a Zk-code and those simple currents, a new series of C2-cofinite and rational vertex operator algebras is constructed.

研究分野：数物系科学

キーワード：頂点作用素代数　パラフェルミオン代数　アフィンリー代数　W代数　格子　コード

１．研究開始当初の背景

(1) パラフェルミオン代数の研究の出発点は、1985 年に発表された Zamolodchikov-Fateev による共形場理論の論文である。その論文では、有限位数の巡回群の対称性を持つものとしてパラフェルミオン代数が導入された。Dong-Lepowsky は 1993 年の著書において、アフィンリー代数の可積分表現におけるハイゼンベルグ代数の真空空間が一般化された頂点代数の構造を持つことを示すとともに、それが本質的には Zamolodchikov-Fateev が導入したパラフェルミオン代数に他ならないことを証明した。パラフェルミオン頂点作用素代数は、アフィンリー代数の可積分表現におけるハイゼンベルグ代数のコミュタントとして定義されるものである。

(2) パラフェルミオン頂点作用素代数は、W 代数の一種である。W 代数は、主として物理の共形場理論において 1980 年代後半から研究されている。数学におけるパラフェルミオン頂点作用素代数の研究は、1993 年の Dong-Lepowsky の著書以降 10 年間以上大きな進展がなかったが、2009 年の Dong-Lam-Yamada の論文を契機として現在国内外で活発に進められている。

(3) 最も基本的なパラフェルミオン頂点作用素代数は、A_1 型アフィンリー代数のレベル k の可積分表現 $L(sl_2,k)$ におけるハイゼンベルグ代数のコミュタント $K(sl_2,k)$ である。$K(sl_2,k)$ は、2010 年の Dong-Wang の論文により任意の型のパラフェルミオン頂点作用素代数を生成する構成要素であることが知られており、重要な研究対象である。2009 年の Dong-Lam-Yamada の論文および 2010 年の Dong-Lam-Wang-Yamada の論文で、$K(sl_2,k)$ の生成元、作用素積展開、特異ベクトル、自己同型群が決定されている。

(4) パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ は、k=2,3 のときそれぞれ Ising モデル、および 3-State Potts モデルに同型である。1996 年に宮本雅彦は、Ising モデルを基にして 2 元体上のコードに付随する新しい頂点作用素代数を構成した。2000 年の Kitazume-Miyamoto-Yamada の論文において、3-State Potts モデルを基にして 3 元体上のコードに付随する頂点作用素代数が構成されている。

(5) 本研究課題の根底にあるのは「レベル k が 4 以上のときにも、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ を基にしてコードに付随する頂点作用素代数が構成できるであろうか」という問題意識である。

２．研究の目的

(1) A_1 型アフィンリー代数のレベル k の可積分表現 $L(sl_2,k)$ におけるハイゼンベルグ代数のコミュタントとして定義されるパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ と、ある種の A 型 W 代数との対応を確立する。この対応が確立されれば、A 型 W 代数で知られている有理性、フュージョン規則などの結果をパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ に適用することが可能になる。また逆に、作用素積展開、ユニタリ性などパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ で得られている結果から、A 型 W 代数に関する理解を深めることができる。

(2) パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ と A 型 W 代数との対応から得られる $K(sl_2,k)$ のフュージョン規則に基づき、Z_k 上のコードを用いて $K(sl_2,k)$ の k 個の simple current を組み合わせることにより、新しい系列の頂点作用素代数を構成する。これにより、C_2 余有限で有理的な頂点作用素代数が多数得られる。k=2,3 の場合に構成されている既存のコード頂点作用素代数を拡張して、2 以上のすべての整数 k について統一的なコード頂点作用素代数の理論を構築する。

(3) Z_k 上のコードを用いて構成される新しい系列の頂点作用素代数について、その既約加群を分類し、フュージョン規則を決定する。k=2,3 のときのコード頂点作用素代数は、モンスター単純群と関係があることが知られている。また k=5,7,13 の場合についても、モンスター単純群との関連が予想されている。2 以上のすべての整数 k について Z_k 上のコードを用いて構成される頂点作用素代数は、モンスター単純群に限らず、さらに幅広い応用が期待できる。

３．研究の方法

(1) パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ に関しては、ウエイトがそれぞれ 3,4,5 の 3 つのプライマリーベクトルおよびそれらの頂点作用素積展開、さらにウエイトが 8 の特異ベクトルの具体的な表示などが 2009 年の Dong-Lam-Yamada の論文および 2010 年の Dong-Lam-Wang-Yamada の論文により知られている。ウエイト 8 の特異ベクトルの C_2 代数における像を詳しく調べることにより、$K(sl_2,k)$ の C_2 代数を決定する。C_2 代数は Poisson 代数の構造を持つが、ウエイト 3 のプライマリーベクトルから得られるウエイト 1 の作用素が引き起こす微分作用素に注目する。さらに、$K(sl_2,k)$ の Zhu を決定することにより、$K(sl_2,k)$ の既約加群を分類する。

(2) A_1 型アフィンリー代数のレベル k の可積分表現 $L(sl_2,k)$ は、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ と平方ノルム 2k のベクトルで生成される階数 1 の格子に付随する格子頂点作用素代数のテンソル積を部分代数として含み、$L(sl_2,k)$ はその部分代数の k 個の既約加群の直和に分解される。ある種の A 型

W 代数と階数 1 の格子に付随する格子頂点作用素代数のテンソル積を考え、それに適当な既約加群をいくつか付け加えることにより A_1 型アフィンリー代数のレベル k の可積分表現 $L(sl_2,k)$を復元するという方針で、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$とある種の A 型 W 代数との対応を証明する。

(3) パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$の k 個の simple current のフュージョン規則は、位数 k の巡回群の対称性を持つ。その対称性を基にすると、simple current extension の理論により、Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数を構成することができる。しかし、本研究では一般化された格子頂点代数を用いて、より直接的に Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数を構成する。すなわち、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$およびその k 個の simple current をある種の格子に付随する一般化された格子頂点代数の中に構成し、一般化された格子頂点代数の d 個のテンソル積に部分代数として含まれる格子頂点作用素代数を考えて、そこにおけるコミュタントとして Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数を具体的に構成する。さらに、Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数の既約加群も、一般化された格子頂点代数の d 個のテンソル積の中に構成する。

４．研究成果

(1) 平成 26 年度では、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$の基本的な性質に関する研究結果、すなわちウエイト 8 の特異ベクトルに基づく C_2 代数の決定、Zhu 代数の決定、および既約加群の分類が、荒川知幸、Ching Hung Lam との共著論文として Advances in Mathematics に掲載された。

また、ある種の有理格子に付随する一般化された頂点代数の内部にパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$の k 個の simple current を具体的に構成した。$K(sl_2,k)$の simple current の構成は、Haisheng Li によるデルタ作用素を用いたアフィンリー代数の可積分表現の既約加群の変形を経由しても実現できるが、本研究では有理格子のツイスト群環へのある種の作用素を考えることにより、有理格子に付随する一般化された頂点代数の内部に構成するという直接的な方法を採用した。これにより、Z_k 上のコードを用いて有理格子のいくつかのテンソル積のコセットの和集合として得られる整格子を考えて、その整格子から定義される格子頂点作用素代数の内部に Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数を構成することが可能になった。本研究で考察したツイスト群環へのある種の作用素は新規性のあるもので、他への応用も期待される。

これらの研究成果を、東京大学で開催された国際研究集会（2014 年 6 月 25 日）、筑波大学で開催された国際研究集会（2014 年 10 月 20 日）、中国の University of Science and Technology of China で開催された国際研究集会（2014 年 11 月 29 日）、台湾の National Taitung University で開催された国際研究集会（2015 年 3 月 10 日）で発表した。

(2) 平成 27 年度では、引き続きパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$、およびその simple current を用いて構成される Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数について研究を行った。

平成 26 年度ではツイスト群環へのある種の作用素を用いて $K(sl_2,k)$の k 個の simple current を構成したが、平成 27 年度ではこれとは異なる方法を採用することにより、$K(sl_2,k)$の k(k+1)/2 個の既約加群すべてを、ある種の有理格子に付随する一般化された頂点代数の内部に具体的に構成することができた。この結果は、コード頂点作用素代数の既約加群の研究にとって重要な意味をもつ。また、コード頂点作用素代数のもとになる Z_k 上のコードの満たすべき条件を検討し、ランクが小さい場合にそのようなコードを分類した。

これらの研究成果を、ブルガリア科学アカデミーで開催された国際研究集会（2015 年 6 月 19 日）、オーストラリア国立大学で開催された国際研究集会（2015 年 7 月 17 日）、中国の四川大学で開催された国際研究集会（2015 年 9 月 7 日）、東北大学で開催された国際研究集会（2016 年 3 月 9 日）、台湾の佛光大学で開催された国際研究集会（2016 年 3 月 24 日）で発表した。このほか、静岡大学で開催された第 60 回代数学シンポジウム（2015 年 9 月 3 日）において講演するとともにシンポジウム報告集にその内容が掲載された。

(3) 平成 28 年度では、平成 27 年度に得られた結果を用いて、偶格子から定義される頂点作用素代数におけるある種の部分代数によるコミュタントとして、Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数を具体的に構成した。さらに、Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数の既約加群を、有理格子に付随する一般化された頂点代数の内部に構成した。

Z_k 上のコードに付随する頂点作用素代数の構成に関する研究成果が、荒川知幸、山内博との共著論文として Springer Proceedings in Mathematics and Statistics に掲載された。また、東京女子大学で開催された国際研究集会（2017 年 3 月 21 日）で発表した。

このほか、長年の課題であったパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$と A 型 W 代数との関係を解明した。研究成果を荒川知幸、Ching Hung Lam との共著論文にまとめ、プレプリントサーバで公表した（arXiv:1701.06229）。

(4) 今後の研究課題として、平成 28 年度までの研究成果を踏まえ、Z_k 上のコードに付随

する頂点作用素代数の既約加群の分類を目標とする。パラフェルミオン頂点作用素代数K(sl_2,k)のフュージョン規則は知られているが、それを用いるとZ_k上のコードに付随する頂点作用素代数のフュージョン規則も決定できる。既約加群の有理格子に付随する一般化された頂点代数の内部での構成とフュージョン規則とを組み合わせて、既約加群を分類する。さらに、Z_k上のコードに付随する頂点作用素代数の表現論の応用についても考察する。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

① T. Arakawa, H. Yamada, H. Yamauchi, Vertex operator algebras associated with Z/kZ-codes, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有, Vol. 191, 2016, pp. 513-521, DOI: 10.1007/978-981-10-2636-2

② T. Arakawa, C.H. Lam, H. Yamada, Zhu's algebra, C_2-algebra and C_2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, Advances in Mathematics, 査読有, Vol. 264, 2014, pp. 261-295 DOI: 10.1016/j.aim.2014.07.021

〔学会発表〕（計１６件）

① 山田裕理, Parafermion VOAs and Z_k-code VOAs, Finite Groups and Vertex Operator Algebras 2017, 2017年3月21日, 東京女子大学, 東京都・杉並区

② 山田裕理, On irreducible modules for parafermion VOAs, Workshop on Finite Groups, VOA, nand Algebraic Combinatorics, 2016年3月24日, Foguang University, Jiao Xi（台湾）

③ 山田裕理, Codes, lattices and vertex operator algebras, 代数的組合せ論とその周辺, 2016年3月9日東北大学大学院情報科学研究科, 宮城県・仙台市

④ 山田裕理, On code vertex operator algebras, Vertex Operator Algebras and Related Topics, 2015年9月7日, Sichuan University, Chengdu（中国）

⑤ 山田裕理, 符号, 格子と頂点作用素代数, 第60回代数学シンポジウム, 2015年9月3日, 静岡大学, 静岡県・静岡市

⑥ 山田裕理, Codes and vertex operator algebras, The Mathematics of Conformal Field Theory, 2015年7月17日, Australian National University, Acton（オーストラリア）

⑦ 山田裕理, Vertex operator algebras associated with Z_k-codes, International Workshop Lie Theory and Its Applications in Physics, 2015年6月19日, Bulgarian Academy of Sciences, Varna（ブルガリア）

⑧ 山田裕理, On Z_k-code vertex operator algebras, Taitung Workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, 2015年3月10日, National Taitung University, Zhiben Campus, Taitung（台湾）

⑨ 山田裕理, パラフェルミオン頂点作用素代数, 第23回数理科学セミナー, 2015年2月24日, 一橋大学, 東京都･国立市

⑩ 山田裕理, Parafermion vertex operator algebras, 大阪市立大学数学研究所談話会, 2015年1月14日, 大阪市立大学, 大阪府・大阪市

⑪ 山田裕理, Vertex operator algebras associated with codes, 上海交通大学数学系セミナー, 2014年12月1日, 上海交通大学, 上海市（中国）

⑫ 山田裕理, Z_k-codes, integral lattices and vertex operator algebras, Algebraic Combinatorics Workshop, 2014年11月29日, University of Science and Technology of China, Hefei（中国）

⑬ 山田裕理, 符号に付随する頂点作用素代数, 愛媛大学代数セミナー, 2014年11月10日, 愛媛大学, 愛媛県・松山市

⑭ 山田裕理, Parafermion VOAs and Z_k code VOAs, Tsukuba Workshop on Infinite-dimensional Lie Theory and Related Topics, 2014年10月20日, 筑波大学, 茨城県・つくば市

⑮ 山田裕理, Z_k code vertex operator algebras, 東北大学大学院情報科学研究科 純粋・応用数学研究センター 組合せ論セミナー, 2014年9月2日, 東北大学, 宮城県・仙台市

⑯ 山田裕理, Z_k-code vertex operator algebras, Workshop Algebras, Groups and Geometries 2014, 2014年6月25日, 東京大学, 東京都・目黒区

６．研究組織

(1)研究代表者

山田　裕理（YAMADA, Hiromichi）
一橋大学・名誉教授
研究者番号：５０１３４８８８

(2)研究協力者
荒川　知幸（ARAKAWA, Tomoyuki）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：４０３７７９７４

山内　博（YAMAUCHI, Hiroshi）
東京女子大学・現代教養学部・准教授
研究者番号：４０４５２２１３

Ching Hung Lam
Academia Sinica（台湾）・教授