2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１２７０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2016

課題番号：２６４０００４１

研究課題名（和文）射影多様体の埋め込みと定義方程式およびm-射影正規性

研究課題名（英文）The embedding structure, defining ideals and the projective m-normality of projective varieties

研究代表者

野間　淳（NOMA, ATSUSHI）

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：９０２６２４０１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：射影多様体の埋め込みの構造とその定義方程式の関係について研究を行った．射影空間の点でそこからの線形射影が像と双有理にならない点を射影多様体Xの非双有理中心点と呼ぶ．本研究では，第一に，射影多様体Xの外の非双有理中心点の集合B(X)とXの内の非双有理中心点の集合C(X)が空でない場合を特徴付けた．応用として，次元n,余次元e,次数dの非特異射影多様体の正則数の上限を，e(d-e)+1以下であると改善した．第二に，これを利用してC(X)が１次元の場合の正則数は，幾つかの例外を除き，d-e+1以下になることを証明した．更に，これらの研究の間接的な応用として，行列の部分行列式についての結果を得た．

研究成果の概要（英文）：We studied the relation between the embedding structute of projective varieties and their defining equations. For a projective variety X, a point of the projective space is called a nonbirational center of X if the linear projection from it induces a nonbirational map onto its image. By B(X) and C(X), we denote the set of nonbirational centers outside of X and inside of X respectively. We call B(X) and C(X) Segre locus and inner Segre locus respectively. In this study, first we give a characterization of a projective variety X with nonempty B(X) and C(X). As one of applications of this result, we have improved the result on Castelnuovo-Mumford regularity for smooth X of codimension e and degree d by showing that the regularity is at most e(d-e)+1. Second we show that the Castelnuovo-Mumford regularity of X with 1-dimensional C(X) is at most d-e+1. Moreover, as an application of these studies, we have a result of maximal minors of a matrix with homogeneous linear forms as entries.

研究分野：代数幾何学

キーワード：射影多様体　射影埋め込み　線形射影　定義方程式　斉次イデアル　m-正規性　カステルヌーボマンフォード正則数

## 1．研究開始当初の背景

この研究は，射影多様体の埋め込みに関する不変量 regularity (カステルヌーボマンフォード正則数，Castelnuovo-Mumford regularity)の解明を目指した課題である．

正確には，N 次元射影空間 $P^N$ の射影多様体 X が m-regular であるとは，X のイデアル層 $I_X$ を直線束 $O_P(1)$ で m-i 回テンソルを取ったものについて

$(C_m)$「$H^i(P^N, I_X(m-i))=0$ (全ての $i>0$)」

が成立することである．そして，$(C_m)$が成立する最小の m が X の regularity である．

大雑把にいえば，regularity とは，幾何学的には，射影空間の超曲面束がどの位大きな次数のときに，射影多様体の完備な線形束を引き起こすかを表す量であり，代数的には，射影空間内での定義方程式の次数やその関係式である syzygies の次数の上限を表す量となっている．したがって，regularity は，射影多様体の幾何学的側面と代数的な側面を結びつける重要な不変量となっている．

この regularity について，次の未解決な予想がある：

**予想**「いかなる超平面にも含まれない $P^N$ の次数 d, 次元 n,余次元 e=N-n の射影多様体 X については，m=d-e+1 について$(C_m)$が成立する」．

この予想は，代数曲線の場合[Gruson-Lazarsfeld-Peskine1983]と非特異複素代数曲面の場合[Lazarsfeld1987]に，正しいことが証明されているが，それ以外の場合については，いろいろな仮定をつけた場合にいくつかの結果が知られているが，n≧3 の場合には，現時点で未解決のままである．

本研究の研究代表者はこれまでの研究において，射影多様体 X に対する次の条件

$(A_m)$ X に含まれない $P^N$ の直線 L と X との交点数の上限は m である；

$(B_m)$ X は，X を含む次数 m 以下の超曲面の共通部分と集合論的／スキーム論的／イデアル論的に一致する；

$(D_m)$ $P^N$ の m 次以上の超曲面のなす線形束は射影多様体 X 上で完備である；

に着目して研究を進めてきた．

というのは，Castelnuovo-Mumford の一般論により

$(C_m) \rightarrow (B_m) \rightarrow (A_m)$, $(C_m) \rightarrow (D_{m-1})$

が成立するので，予想$(C_{d-e+1})$ を調べようとするためには，$(A_{d-e+1})$, $(B_{d-e+1})$, $(D_{d-e})$が成立するか調べることが自然な問題となると考えられるからである．更に，拡張された regularity 予想においては，m が d-e+1 に十分に近い場合には$(A_m) \rightarrow (C_m)$も成立するとも予想されているので，これらの相互関係を調べることは重要であると考えたからである．

実際，このようなアプローチのもとで，$(A_{d-e+1})$ については，[Bertin2002] と[Kwak2005]による先行研究がありそれを受けて，[Noma2005]と[Noma2009]では，射影多様体が Cohen-Macaulay 的な場合に$(A_{d-e+1})$が成立することを証明し，さらに多重割線と切断種数の関係を明らかにしてきた．しかしながら，一般の特異点を持つ場合には，$(A_{d-e+1})$が得られておらず，$(B_{d-e+1})$を示すことで，これを解決できないかと考えてきた．

$(B_{d-e+1})$については，[Noma2010]において，線形射影で超曲面を構成する方法によって研究を行ってきた．これにより，非双有理中心点の集合であるセグレローカスという集合を調べることが重要であると分かってきた．非双有理中心点とは，その点からの射影が射影多様体 X とその像との間に双有理写像を引き起こさない点をいう．このとき，セグレローカス B(X)とは，X の外の非双有理中心点の集合で，インナーセグレローカス C(X)とは，X の非特異点である非双有理中心点の集合をいう．B(X) は，[Segre1936], [Segre1937], [Calabri-Ciliberto2001]によって研究され，有限個の線形部分空間の和集合であることが示されている．

本研究課題の代表者の以前の研究課題の成果[Noma2010]では，「これらの超曲面の共通部分は，射影多様体とそのセグレローカスの和集合となる」ことが示されたので，「セグレローカスが空集合とはならない射影多様体を特徴づける」ことや「セグレローカスと射影多様体を分離する超曲面をどのように探すか」ということが次の研究課題であることが明らかになってきた．

他方で，射影多様体の非双有理中心点の研究から着想した，射影多様体の二重点因子の豊富性の結果も C(X)の研究と関わっている．非特異射影多様体 X に対して，その二重点因子とは，H を超平面切断因子，$K_X$ を標準因子とするとき，因子(d-n-2)H- $K_X$のことである．ただし，d は X の次数，n は X の次元を表す．これまで，Mumford によりこの因子は固定点を持たないことが示され，更に，[BoIlic2001]により，この因子は豊富であることが証明されていた． C(X)の研究の際に，非双有理中心でない X の点 x を選ぶとそれに対して，十分に一般の内点が張る線形部分空間からの線形射影は，選ばれた点 x で埋め込みとなることが分かっていた．この線形射影を用いて，(d-n-2)の部分を小さく取りかえるというアイディアで，幾つかの例外を除くと，(d-n-e-1)H- $K_X$は C(X)以外では固定点を持たないこと，その結果として，(d-n-e)H- $K_X$は豊富であることが，本研究課題の代表者の以前の研究により，予想されていた．他方，C(X)が本当に固定点となるかどうかという問題に関して，C(X)の１次元以上の成分は，C(X)の構造定理と[BoIlic2001]を合わせることにより，実際に固定点となることが分かっていた．しかし，C(X)が０次元の成分について，固定点となるかどうかについては，不明であった．

## 2．研究の目的

本研究の目的は，これまで研究からその重

要性が明らかになってきたセグレローカス B(X)やインナーセグレローカス C(X)の構造を調べることである．これを通して，射影多様体の埋め込みの構造の解明を行うこと，特に，研究開始当初の背景にあげた条件

$(B_{d-e+1})$ X は，X を含む次数 d-e+1 以下の超曲面の共通部分と一致すること；

$(D_{d-e})$ $P^N$ の d-e 次以上の超曲面のなす線形束は射影多様体 X 上で完備であること；

が成立することを示すことである．特に，B(X)や C(X)が空でない場合について研究することである．さらには，関連する$(A_{d-e+1})$, $(C_{d-e+1})$が成立することを示すことである．そのために，着手しやすい幾つかの場合の X について先ず証明しようとすることを目標とした．

## ３．研究の方法

これまでの研究によって，セグレローカス B(X)やインナーセグレローカス C(X)は，幾つかの線形部分空間を既約成分とする和集合からなり，空集合でない B(X)や C(X)を持つ n 次元射影多様体は，その一つの既約成分の線形部分空間を頂点とする(n+1)次元の錐に含まれる，従って錐の上の余次元１の部分集合であることがわかっている．従って逆に，(n+1)次元の錐の余次元１の代数的な集合のうちでどのような場合にその頂点集合がセグレローカスやインナーセグレローカスとなるかを調べることが問題となる．頂点集合である線形部分空間が一つのセグレローカスとなっている例を作ることは容易であるが，複数持つ場合やその線形部分空間に沿って密な集合が非特異点となるインナーセグレローカスを持つ場合を構成することはそれほど容易ではなく，このような例は強い特徴を持っていると考えられるため，このような例を構成し逆に特徴づけるという方針のもとで研究を進めた．

(1)セグレローカスを持つ射影多様体の特徴づけ

セグレローカスやインナーセグレローカスを持つ n 次元射影多様体は強い特徴を持つと考えられる．特に複数の既約成分がある B(X)や C(X)をもつ射影多様体の構成について考察をおこなった．本研究課題の研究代表者のこれまでの研究課題で，B(X)として１次元以上の線形部分空間を２つ持つ射影多様体の構成はできているので，その特徴づけについて考察をおこなった．

(2) セグレローカスを射影多様体から分離する射影空間の超曲面の構成

B(X)や C(X)を持つ n 次元射影多様体は，その一つの既約成分の線形部分空間を頂点とする(n+1)次元の錐に含まれることがわかっているので，その錐から射影多様体を分離する超曲面の構成について考察を行った．特に，B(X)や C(X)を分離する低い次数の超曲面の構成に着目して研究を進めた．

## ４．研究成果

(1) セグレローカスやインナーセグレローカスを持つ射影多様体の特徴付け

セグレローカス B(X)やインナーセグレローカス C(X)の既約成分として，線形部分空間を持つ射影多様体の特徴付けが得られた．特に，線形部分空間の次元を X の特異点集合の次元で評価することができた．これにより，X が非特異の場合には，B(X)は高々有限個の点の和集合であり， C(X)は一つの直線と幾つかの有限個の点の和集合か有限個の点の和集合であることがわかった．これをもとにして，これまで得られていた次数 d で余次元 e の n 次元非特異射影多様体についての regularity の評価を改善することができた．実際，それまでの最良の X の regularity 評価は，[Bertram, Ein, Lazarsfeld] による X は ed-e+1 であったが，これを e(d-e)+1 とすることができた．これらを雑誌論文①として発表予定となった．（この成果は，前回までの研究の継続も含んでいる．）

(2) Roth varieties の regularity の評価

C(X)が１次元以上である非特異な射影多様体として特徴づけられる Roth variety X に対して，regularity を評価した．X は直線を頂点とする有理スクロール上の錐の因子になっていることがわかっている．そこで，有理スクロールの次数を a，因子としての次数を m とするとき，これらを用いると Roth variety X は(d-e+1+((1-e)m+a-2))-regular となることを証明した．この結果は雑誌論文②として発表した（この成果は，前回までの研究の継続も含んでいる．）一方，実際には，(1-e)m+a-2>0 の場合も含めて X が (d-e+1)-regular であることが期待される．そこで， n,a,m が小さい場合の X について，計算機を用いたランダム係数による実験を行って，この予想が正しいことの裏付けを行った．しかし，予想が正しいことの証明は今後の研究課題となった．

(3) C(X)が点である conical rational scroll の二重点因子の固定点について

次数 d,余次元 e の n 次元非特異射影多様体 X について二重点因子$(d-n-e-1)H-K_X$は，幾つかの例外を除くと C(X)以外に固定点を持たないことが示された．これは前回までの研究課題の結果も含む成果であり，これを雑誌論文⑤として発表した．そこで次に，実際に C(X)が固定点となるかどうかを調べることが問題となる．ここでは，C(X)が一点集合でありその点からの線形射影が有理スクロールとなる場合について，C(X)が固定点となるかを調べた．そして実際には二重点因子$(d-n-e-1)H-K_X$ に対応する完備線形束は固定点を持たないこと，更には，より強い結果として$(d-n-e-1-\varepsilon)H-K_X$ （$\varepsilon \leqq (a-2)(m-2)$）が固定点を持たないことを示した．ここで，有理スクロールは $c_1=a$ の $\mathbf{P}^1$ のベクトル束に対

応し，X はその m 次因子であるとする．この結果は，現在プレプリントの形になっている．

また，上の(1),(2),(3)を含めたこれまでの研究の概観について，口頭発表する機会を得た．さらにその内容について，その報告集である雑誌論文④にまとめて発表した．

(4) 全射行列の Maximal minor の生成するイデアル

N 変数 $X_1,...,X_N$ の１次同次式を成分とする m×(m+k)行列がアファインＮ次元空間上で原点を除き全射である場合には，行列の m 次小行列式の作るベクトル空間が N+1 変数の m 次同次式全体のベクトル空間と一致するかという問題を肯定的に解決した．この問題は，微分方程式の Korn の不等式の研究からの問題で，その解決のためには regularity の研究のための一つの道具である Eagon-Nothcott 複体が使われる．この成果を雑誌論文③として発表した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）


①．Atsushi Noma, Projective varieties with nonbirational linear projections and applications, Transactions of the American Mathematical Society，査読有，掲載決定印刷中．

②．Atsushi Noma， Castelnuovo-Mumford regularity of projected Roth varieties，Journal of Algebra，査読有， Vol.466， pp.153-168，(2016),http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.06.005．

③．Hiroya Ito，Atsushi Noma，Masahiro Ohno, Maximal minors of a matrix with linear form entries， Linear and Multilinear Algebra，査読有，Vol.63，pp.1599-1606， (2015)，DOI:http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2014.959516

④．野間　淳, 特殊な線形射影を持つ射影多様体とその応用，第 60 回代数学シンポジウム報告集, 査読無, pp.50-64, (2015), http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp15_files/algebraic-geometry/Noma-alg-symp2015.pdf．

⑤．Atsushi Noma， Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double point divisors， Transactions of the American Mathematical Society， 査読有， Vol.366(9)， pp.4603-4623， (2014)， **DOI:** https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06129-1


〔学会発表〕（計　７件）


①．野間　淳， Defining equations of birational-divisors of conical scrolls，農工大数学セミナー2017，２０１７年，３月２２日，東京農工大学．

②．野間　淳， Base-point-freeness of double-point divisors of smooth birational -divisors on conical rational scrolls,日本大学特異点セミナー，２０１７年1月２３日，日本大学文理学部．

③．野間　淳， Base-point-freeness of double-point divisors of smooth birational -divisors on conical rational scrolls,研究集会「代数曲線・曲面とその周辺」，２０１６年１１月２６日，大阪大学．

④．野間　淳，Zariski-Fujita-Ein の定理における semi-ample line bundle が base-point-free になる multiple の値について日本大学特異点セミナー，２０１６年１０月２４日,日本大学文理学部．

⑤．野間　淳，Regularity of projected Roth varieties，日本数学会 2016 年度代数学分科会，２０１６年３月１７日，筑波大学．

⑥．野間　淳，Nonbirational centers of linear projections of projective varieties,代数幾何学ミニ研究集会，２０１６年３月１１日，埼玉大学．

⑦．野間　淳,特殊な線形射影を持つ射影多様体とその応用，第 60 回代数学シンポジウム，２０１５年９月１日,静岡大学．


〔その他〕
ホームページ等（研究者総覧）
http://er-web.jmk.ynu.ac.jp/html/NOMA_Atsushi/ja.html

６．研究組織
(1)研究代表者
野間　淳（Noma Atsushi）
横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授
研究者番号：90262401

(2)研究分担者　（なし）

(3)連携研究者　（なし）

(4)研究協力者　（なし）