

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 25 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400042

研究課題名(和文) 対数的小平次元が1以下となる開代数曲面と正規代数曲面の構造解明

研究課題名(英文) Understanding the structure of open algebraic surfaces and normal algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension one or less

研究代表者

小島 秀雄 (Kojima, Hideo)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：90332824

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：開代数曲面、正規代数曲面、および多項式環の高階導分による核について研究した。有理曲面ではない開代数曲面に対して、その対数的小平次元が非負であることとその対数的12種数が正となることが同値であることを証明した。開代数曲面と0ホモロジー平面の結果を用いて、ピカル数1で高々有理対数的標準特異点のみを持つ正規デルペzzo曲面で特異点の個数が1または4になるものを部分的に分類した。3変数多項式環の局所有限高階導分の核について、それが多項式環になるための十分条件を与えた。更に、これらの結果をアフィン代数多様体の諸問題に応用した。

研究成果の概要(英文)：I have studied open algebraic surfaces, normal algebraic surfaces and kernels of higher derivations in polynomial rings. I proved that, for an irrational open algebraic surface, its logarithmic Kodaira dimension is non-negative if and only if its logarithmic 12 genus is positive. I studied normal del Pezzo surfaces of Picard rank one with only rational log canonical singularities by using structure theorems on open algebraic surfaces and some results on \mathbb{Q} -homology planes and gave partial classification results for those surfaces with one or four singular points. I also gave a sufficient condition for the kernel of a locally finite higher derivations in the polynomial ring in three variables to be a polynomial ring. Furthermore, I applied these results to some problems on affine algebraic varieties.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学 開代数曲面 正規代数曲面 対数的小平次元 多項式環 高階導分

1. 研究開始当初の背景

(1) 開代数曲面

開代数曲面の対数的小平次元による構造定理は基礎体の標数が零の場合は射影代数曲面の場合と類似の形で成り立っている。この結果はアフィン代数多様体の研究で重要であり、現在もアフィン代数曲面の自己同型群や消去問題等アフィン代数幾何学の中心的な話題に応用されている。研究代表者は正標数での開代数曲面の対数的小平次元による構造定理を確立するべく研究を進めており、対数的小平次元が1の場合には構造定理を確立させ、そのような曲面の対数的多重種数に関する結果を得た。しかしながら、対数的小平次元が零以下の場合には部分的な結果しかない。そのため、正標数のアフィン代数多様体の研究は標数零の場合に比べると進展していない。

(2) 正規代数曲面

酒井文雄氏により正規 Moishezon 曲面の極小モデル理論と極小モデルの大まかな構造定理が確立した。近年になって、正標数の正規代数曲面の極小モデル理論が研究されており、曲面が有理特異点あるいは対数的端末特異点のみを持つ場合には極小モデル理論が構築された。次は、極小モデルの構造を調べることが必要になってくるが、非特異射影代数曲面の場合と比べて、特異点を持つ場合は格段に難しくなり、特殊な場合しか分かっていない。特に、ピカール数1の正規デルペッツォ曲面(反標準因子が豊富となる正規射影代数曲面)を調べる必要がある。

(3) 多項式環の部分代数

多項式環の導分と局所ベキ零導分、およびそれらの変換式環(以後、核と呼ぶ)はアフィン代数幾何学における中心的な研究対象であり、アフィン代数多様体の自己同型群や代数群の作用の研究に応用されている。

標数零の体上の多項式環の導分や局所ベキ零導分の核の研究はここ二十数年でかなり進展してきている。正標数の体上の多項式環では、高階導分や階層的局所有限高階導分が標数零の場合の導分や局所ベキ零導分の類似物であり、研究代表者はそれらの核に関する基本的な結果を得ている。しかしながら、正標数の場合の研究は標数零の場合に比べて殆ど進展していない状態である。

2. 研究の目的

任意標数での対数的小平次元が1以下となる開代数曲面と正規代数曲面の構造を解明し、アフィン代数多様体の研究に応用する。具体的には次の課題について研究を行う。

(1) 開代数曲面

正標数での対数的小平次元が零以下となる開代数曲面の構造を解明する。また、対数

的小平次元が1以下となる、非有理開代数曲面の構造定理を正標数の場合にも確立し、そのような曲面の対数的多重種数を調べる。

(2) 正規代数曲面

ピカール数1の正規射影代数曲面の構造を調べる。特に正規代数曲面の極小モデルとして現れる曲面の重要なクラスである、ピカール数1の正規デルペッツォ曲面とQホモロジー射影平面の構造を解明する。

(3) 多項式環とその部分代数

任意標数での3変数多項式環の高階導分の核の代数的な性質を調べる。また、整域上の多項式環における多項式の整閉性とその多項式が生成する部分代数の環論的性質を調べる。

3. 研究の方法

開代数曲面、正規代数曲面、及び、多項式環の部分代数について、以下のようにして研究を遂行した。

(1) 開代数曲面について

1 開代数曲面の対数的極小モデルを構成する。開代数曲面の対数的極小モデル理論は既に完成しているが、対数的極小モデルの分類を行うために、その対数的多重種数を変えない範囲で、対数的極小モデルから更に第1種例外曲線をブローダウンする必要がある。本研究では対数的小平次元が零の場合に、極小モデルの境界因子からいくつかの曲線を除いた対に対して、対数的極小モデルを更にとることを行った。

2 1で得られた極小モデルを分類する。本研究では、曲面が非有理線織曲面となる場合と曲面の対数的小平次元が零以下で不足数(完備化したときに付け加えられる境界因子の既約成分の個数から完備化した曲面のピカール数を引いた値)が正になる場合について、研究を遂行した。

3 2で考察した曲面の対数的多重種数を調べる。

(2) 正規代数曲面について

主にピカール数が1となる正規有理曲面について、以下のようにして研究を遂行した。

1 ピカール数1の高々有理対数的標準特異点のみを持つ正規デルペッツォ曲面Xについて、その反標準因子との交点数が最小の値をとる曲線の考察を、Qホモロジー平面に関するK. Palka氏の結果を利用して行った。Xが対数的端末特異点でない特異点を持ち、特異点の個数が1の場合と4の場合についてXを調べた。特異点の個数が4の場合は高橋剛氏と共同で行った。

2 Qホモロジー射影平面Sで、その非特異部分に有理尖点曲線Cを含むものを、開代数曲面の対数的小平次元による構造定理とCの補集合がQホモロジー平面になることを利用し

て、調べた。本研究では特に、 C の補集合の対数的小平次元が1以下となる場合を中心に研究を行った。

(3) 多項式環とその部分代数について

1 整域上の多項式環の部分環が、高階導分の核として表されるための必要十分条件を体上の場合の結果を元に探した。そして、この結果を、多項式環を含む整域のクラスに拡張することを試みた。

2 研究代表者が指導している大学院生の長峰孝典氏と共に、整域上の多項式環内の1個の多項式で生成される部分代数について、その整閉性と生成元となる多項式との関係について、1の研究で得た結果を用いて調べた。UFD上の多項式環に関してこれまで研究代表者が得た結果にどのような条件をつけることにより一般の整域の場合にも成り立つかどうかを考えた。また、UFDでない整域の場合の特有の例の構成を試みた。

3 3変数多項式環の局所有限高階導分の核の代数的性質について調べた。特に、その核が多項式環になるための条件をこれまでに得た多項式環の階層的局所有限高階導分の核に関する結果を用いることにより探した。

4. 研究成果

本研究で得られた成果を研究の目的での項目毎に分けて書く。

(1) 開代数曲面

非有理開代数曲面と対数的小平次元が零の開代数曲面に関して、次のような成果を得た。

1 非有理開代数曲面の対数的小平次元が非負であることとその対数的12種数が正となることが同値であることを、基礎体の標数が正の場合にも示した。この結果とこれまでに得られた対数的小平次元が零となる非有理開代数曲面の分類結果と合わせて、論文としてまとめ、掲載が決定した(5の雑誌論文1)。

2 対数的小平次元が零となる開代数曲面に対して、その不足数をその曲面を完備化したときの境界因子の既約成分の個数から完備化した曲面のピカル数を引いた値として定義し、この値が非有理曲面に対しては零以下であることを示した。また、有理曲面の不足数は2以下であることを示し、更に、不足数が2となるものの対数的極小モデルを分類した。これらの結果は基礎体の標数が零の場合には既に知られているが、それを正標数の場合に拡張している。現在、不足数が1となる場合について研究を進めており、これが完成した後に、上記の結果と合わせて論文として発表する予定である。

(2) 正規代数曲面

ピカル数1の正規デルペッツォ曲面と Q ホモロジー射影平面に関して、次のような成果を得た。

1 ピカル数が1で高々有理対数的標準特異点のみを持つ正規デルペッツォ曲面について、次のような成果を得た。まず、そのような曲面の内、特異点が一個の場合を全て決定し、更に、非特異部分の基本群が有限アーベル群であることを証明した。これは R. V. Gurjar 氏と D.-Q. Zhang 氏による特異点として対数的末端特異点を1個だけ持つ正規射影有理曲面に関する結果の一部を改良している。次に、特異点が4個の場合を高橋剛氏と共同で研究を行い、そのような曲面の中で、3個以上の特異点を通る長さ極小の extremal 有理曲線を含みかつ対数的末端特異点でない特異点を含むものを分類した。前者の結果は論文としてまとめて、発表した(5の雑誌論文4)。後者については、まだ特異点の個数が4の場合は完全に分類していないため、論文にはまとめていないが、現在も研究を進めており、近いうちには完全に分類できるものと期待している。

2 Q ホモロジー射影平面 S で、その非特異部分に補集合の対数的小平次元が負となる有理尖点曲線 C を持つものについて、次の結果を得た。 C の特異点の極小埋め込み解消による固有変換像 C' に対して、 $S-C$ が affine ruled であることと C' の自己交点数が-1以上になることが同値であることを証明した。 S が射影平面の場合には吉原久夫氏が同様の結果を証明しているが、この結果は吉原氏の結果を一般化している。現在は、 $S-C$ が affine ruled でない場合を研究しており、この場合を決定することができた場合は上記の結果と合わせて論文として発表する予定である。

(3) 多項式環の部分代数

多項式環の導分や階層的局所有限高階導分の核、および、多項式環の整閉な部分代数に関して、次のような成果を得た。

1 長峰孝典氏と共に、整域上の多項式環における整閉多項式について研究した。基礎環の商体を考え、体上で知られている結果を用いることにより、UFD上の多項式環の場合に研究代表者によって得られていた結果を整域上の場合に一般化した。また、正標数のUFDでない整域上の多項式で、整閉ではないがその多項式が生成する部分代数の極大性が成り立つものを構成した。これらの結果については、長峰孝典氏との共著論文として発表した(5の雑誌論文3)。

2 体上の3変数多項式環の局所有限高階導分の核について、その核が自明でない階層的局所有限高階導分を持つとき、その核は多項式環になることを証明した。この結果を用いることにより、B. M. Bhatwadekar 氏と N. Gupta 氏によって証明された、非完全体上の2変数多項式環に対する消去定理の別証明を与えた。これらの結果については、論文として発表した(5の雑誌論文2)。

3 整域 R 上の整閉整域 A の整閉部分環と高階導分の核について研究した。 A の商体が R

の商体上有限生成であるとき、 A の部分 R 代数が A 上の有理的高階導分の核として表されるための必要十分条件を得ることができた。更に、 A の有理的高階導分の核の R 上の超越次数が A の超越次数-1 以上となる場合に、その核の商体とその導分の A の商体上に延長した高階導分の核が一致することを示した。これらは研究代表者によって得られている結果を一般化している。更に、 A が R 上有限生成でない場合に、 A の有理的高階導分の核で、 A の高階導分の核として表されないものを構成した。これらの結果は論文にまとめたが、更なる考察も含めるべく、研究を行っているところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1 Hideo Kojima, Irrational open surfaces of non-negative logarithmic Kodaira dimension, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 掲載決定, 査読有.

2 Hideo Kojima, Notes on the kernels of locally finite higher derivations in polynomial rings, *Communications in Algebra*, vol. 44, 2016, pp. 1924-1930, 査読有. DOI: 10.1080/00927872.2015.1027387

3 Hideo Kojima and Takanori Nagamine, Closed polynomials in polynomial rings over integral domains, *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 219, 2015, pp. 5493-5499, 査読有. DOI: 10.1080/00927872.2013.879876

4 Hideo Kojima, Normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one with unique singular points, *Nihonkai Mathematical Journal*, vol. 25, 2014, pp. 105-118, 査読有.
<http://projecteuclid.org/euclid.nihmj/1427390301>

[学会発表](計 13 件)

1 Hideo Kojima, Normal del Pezzo surfaces of rank one with log canonical singular points, The 15th Affine Algebraic Geometry Meeting (第 15 回アフィン代数幾何学研究集会), 関西学院大学大阪梅田キャンパス (大阪府大阪市), 2017 年 3 月 2 日.

2 小島 秀雄, Some results on open algebraic surfaces of log Kodaira dimension zero, 第 4 回代数幾何学研究集会 宇部, 宇部工業高等専門学校 (山口県宇部市), 2017 年 1 月 7 日.

3 小島 秀雄, Kernels of some higher derivations in polynomial rings, 第 90 回米沢数学セミナー「可換 Banach 環と関連分野研究集会」, 山形大学工学部 (山形県米沢市), 2016 年 7 月 3 日.

4 小島 秀雄, Some results on open algebraic surfaces of log Kodaira dimension zero, Workshop on Galois point and related topic, 新潟大学駅南キャンパス ときめいと (新潟県新潟市), 2016 年 6 月 4 日.

5 小島 秀雄, Kernels of some higher derivations in polynomial rings, 第 7 回多項式環論セミナー, 首都大学東京 (東京都八王子市), 2016 年 2 月 18 日.

6 Hideo Kojima, Some results on open algebraic surfaces of non-negative logarithmic Kodaira dimension, KIAS-TIFR-ICTS Joint Advanced School of Algebraic Surfaces and Related Topics, International Centre for Theoretical Sciences of the Tata Institute of Fundamental Research, Bangalor (ベンガール (インド)), 2015 年 11 月 30 日.

7 小島 秀雄, 3 変数多項式環における局所有限高階導分の核, 射影多様体の幾何とその周辺 2015, 高知大学 (高知県高知市), 2015 年 10 月 31 日.

8 小島 秀雄, オイラー数が 0 以下となる正規アフィン代数曲面について, 第 6 回多項式環論セミナー, 静岡大学 (静岡県静岡市), 2015 年 8 月 20 日.

9 小島 秀雄, 多項式環における局所有限高階導分の核について, 代数小研究集会 in 新潟, 新潟大学 (新潟県新潟市), 2015 年 6 月 7 日.

10 小島 秀雄, 多項式環における局所有限高階導分の核について, 第 5 回多項式環論セミナー, 首都大学東京 (東京都八王子市), 2015 年 1 月 12 日.

11 小島 秀雄, Some results on normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one, 代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜, ソフトピアジャパンセンタービル (岐阜県大垣市), 2015 年 1 月 10 日.

12 小島 秀雄, Locally finite iterative higher derivations on $k[x,y]$, アフィン代数幾何学研究集会, 首都大学東京 (東京都八王子市), 2014 年 9 月 14 日.

13 Hideo Kojima, Open algebraic surfaces of non-negative logarithmic Kodaira dimension, RIMS Workshop "Kyoto Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups", 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2014 年 7 月 11 日.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

[その他]

(1) 研究集会報告集(計1件)

1 小島秀雄, 3変数多項式環における局所有限高階導分の核, 射影多様体の幾何とその周辺 2015 (於 高知大学), 2016年, pp. 1-8, 査読無.

(2) 研究集会の開催(計7件)

1 The 15th affine algebraic geometry meeting (第15回アフィン代数幾何学研究集会), 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府大阪市), 2017年3月2日~3月5日, 世話人: 小島秀雄(新潟大学), 岸本崇(埼玉大学), Adrien Dubouloz (U. Bourgogne), 増田佳代(関西学院大学).

2 射影多様体の幾何とその周辺 2016, 高知工科大学永国寺キャンパス(高知県高知市), 2016年10月8日~10月10日, 世話人: 福間慶明(高知大学), 小島秀雄(新潟大学), 春井岳(高知工科大学).

3 The 14th affine algebraic geometry meeting (第14回アフィン代数幾何学研究集会), 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府大阪市), 2016年3月5日~3月8日, 世話人: 小島秀雄(新潟大学), 岸本崇(埼玉大学), Adrien Dubouloz (U. Bourgogne), 増田佳代(関西学院大学).

4 射影多様体の幾何とその周辺 2015, 高知大学(高知県高知市), 2015年10月31日~11月2日, 世話人: 福間慶明(高知大学), 小島秀雄(新潟大学).

5 The 13th affine algebraic geometry meeting (第13回アフィン代数幾何学研究集会), 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府大阪市), 2015年3月5日~3月8日, 世話人: 小島秀雄(新潟大学), 岸本崇(埼玉大学), 増田佳代(関西学院大学), 黒田茂(首都大学東京).

6 射影多様体の幾何とその周辺 2014, 高知大学(高知県高知市), 2014年11月1日~11月3日, 世話人: 福間慶明(高知大学), 小島秀雄(新潟大学).

7 RIMS Workshop "Kyoto Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups", 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 2014年7月7日~7月11日, 世話人: 増田佳代(関西学院大学), 岸本崇(埼玉大学), 小島秀雄(新潟大学), 宮西正宜(関西学院大学), Mikhail Zaidenberg (U. Grenoble I).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小島 秀雄 (KOJIMA, Hideo)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号: 90332824

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

岸本 崇 (KISHIMOTO, Takashi)
埼玉大学・理工学研究科・准教授
研究者番号: 20372576

齋藤 夏雄 (SAITO, Natsuo)
広島市立大学・情報科学研究科・講師
研究者番号: 70382372

高橋 剛 (TAKAHASHI, Takeshi)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号: 60390431

(4) 研究協力者

長峰 孝典 (NAGAMINE, Takanori)