

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 28 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400046

研究課題名(和文) 楕円量子群の表現による楕円Ruijsenaarsモデルの解析

研究課題名(英文) Representation of elliptic quantum groups and elliptic Ruijsenaars model

研究代表者

今野 均 (Konno, Hitoshi)

東京海洋大学・学術研究院・教授

研究者番号：00291477

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：面型楕円量子群 $U_{q,p}(gl_N)$ のL-作用素の量子行列式や小行列式を定式化し、L-作用素の量子行列式が $U_{q,p}(gl_N)$ の中心元を与えることを明らかにするとともに、 $U_{q,p}(gl_N)$ のハーフカレントの量子小行列式による表示を導出した。また、 $U_{q,p}(gl_N)$ とFelderの楕円量子群の中心拡大 $E_{q,p}(gl_N)$ との同型の証明を完成した。さらに、 $U_{q,p}(sl_N)$ のレベル1表現の繋絡作用素を用いてその合成積のトレースを取ることにより面型楕円q-KZ方程式の形式的楕円超幾何積分解や重み関数を導出した。

研究成果の概要(英文)：We have formulated the quantum determinant as well as the quantum minor determinants of the L-operators for the face type elliptic quantum group  $U_{q,p}(gl_N)$ . We have also obtained a formula for the elliptic half currents in terms of the quantum minor determinants. We then have completed a proof of the isomorphism between  $U_{q,p}(gl_N)$  and the central extension  $E_{q,p}(gl_N)$  of Felder's elliptic quantum group. In addition, we have obtained formal elliptic hypergeometric integral solutions to the face type elliptic q-KZ equation and associated elliptic weight functions by considering the traces of the product of the intertwining operators of the level-1  $U_{q,p}(sl_N)$ -modules.

研究分野：数理物理学、表現論

 キーワード：楕円量子群 楕円Ruijsenaarsモデル 楕円q-KZ方程式 量子行列式 変形W代数 Macdonald対称関数  
楕円超幾何関数

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 楕円量子群とは、ヤン・バクスター方程式の楕円関数解を構造関数とする関係式によって定まる無限次元の双代数である。特に、代表者らが定式化した面型楕円量子群  $U_{q,p}(\mathfrak{g})$  は、Drinfeld 型生成子によって定式化されるホップ重代数であり、アフィンリー環のループ代数による実現の自然な拡張になっている [K,JKOS,K09]。これまでの研究により、有限次元、無限次元の表現や繫絡作用素（頂点作用素）の構成、 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$  の楕円カレント（生成元の母関数）と変形  $W$  代数の遮蔽作用素の同定 [K,JKOS]、面型の楕円関数型可解格子模型の代数解析的定式化 [JKOS, KKW, CKSW]) や、楕円超幾何級数  ${}_{12}V_{11}$  の表現論的導出 [K09] などを行ってきた。

(2) 楕円 Ruijsenaars 模型とは、楕円関数を係数とする差分作用素の可換族によって定まる量子可積分系であり、その三角関数型への極限は Macdonald 差分作用素を与える。

三角関数型の場合、固有値問題は Macdonald 対称関数を固有関数として完全に解かれており、Macdonald 対称関数自体も量子群やアフィンヘッケ環、変形  $W$  代数に基づいて、次のような3通りの表現論的な定式化がなされている。

- 量子群の中心元と繫絡作用素の合成積のトレースとしての定式化 [EK,Mi1]
- 変形  $W$  代数の特異ベクトルとしての定式化 [MY,AOS]
- $q$ - $KZ$  方程式の解との対応 (Cherednik-Matsuo 対応の量子群版) を用いた定式化 [Ch,Ka,,Mi2]

これに対して、楕円 Ruijsenaars 模型の固有値問題は、模型の定式化以来30年近く未解決である。上に挙げた三角関数型の場合の3通りの定式化は、楕円関数型の場合へも拡張可能であると期待されており、解決へ向けての重要な手がかりを与える。

## 2. 研究の目的

代表者らが定式化した楕円量子群  $U_{q,p}(\mathfrak{g})$  の  $L$  作用素や有限次元・無限次元表現と連携研究者の野海によるアフィンヘッケ環の楕円化の実現に基づいて、三角関数型の場合の上記3通りの定式化を統合し楕円関数型に拡張する枠組みを構築し、楕円 Ruijsenaars 模型の固有値問題の解決、特に、固有関数として期待される Macdonald 対称関数の楕円関数類似の定式化を目指す。

具体的には、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  の中心元を構成し、変形  $W$  代数との臨界レベルでの同型 (Drinfeld 予想の拡張) の確立や、中心元から構成される可換な作用素の族による楕円 Ruijsenaars 模型の再定式化、三角関数型の場合に見出されている変形  $W$  代数の特異ベクトルとしての Macdonald

対称関数の定式化や Cherednik-Matsuo 対応の楕円関数類似の構築などを目指す。

## 3. 研究の方法

### (1) 楕円量子群 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の表現の整備：

将来的な  $BC_n$  型ルート系への拡張を見据えて、楕円量子代数  $U_{q,p}(\mathfrak{g})$  の定式化を楕円アフィンリー環  $\mathfrak{g} = A_{2n}^{(2)}, A_{2n-1}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$  などの場合へと拡張し、有限次元および無限次元表現を具体的に構成する。また、 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ -加群の繫絡作用素の実現や変形  $W$ -代数の生成母関数の導出を行う。

### (2) $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ の中心元の構成と Drinfeld 予想の解決：

Drinfeld-Reshetikhin による量子群の中心の構成を、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  のようなダイナミカルパラメータをもつ量子群の場合へと拡張し、 $L$  作用素による中心元の構成を行う。さらに、 $L$  作用素を自由場表現（脇本表現）[K] することにより、臨界レベルにおける中心元と変形  $W$  代数との同型 (Drinfeld 予想の拡張) を示す。

### (3) $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ の中心元による楕円 Ruijsenaars 模型の再定式化

三角関数型の場合の Etingof-Kirillov [EK] や連携研究者の三町 [Mi1] の結果を拡張して、楕円量子群  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  の中心元と繫絡作用素に基づいて楕円 Ruijsenaars 模型を再定式化し、Macdonald 対称関数の楕円関数類似を繫絡作用素のトレースとして実現する。

### (4) 変形 $W$ 代数の特異ベクトルとしての定式化

(2), (3) に基づいて、楕円量子群  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  の中心元と変形  $W$  代数、楕円 Ruijsenaars 模型の関係を明らかにし、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  の楕円カレントとして得られる遮蔽作用素から変形  $W$  代数の特異ベクトルを導く。これを種にして楕円関数的な拡張を考え、楕円 Macdonald 対称関数の積分表示式を求める。

### (5) Cherednik-Matsuo 対応の楕円関数類似の構築

楕円  $R$  行列と楕円アフィンヘッケ環の対応に基づいて [Ch,Ka] の結果を拡張し、楕円量子群  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  の表現により導かれる楕円量子  $KZ$  方程式の解と楕円アフィンヘッケ環より導かれる楕円 Ruijsenaars 模型の固有関数との対応を定式化する。また、(4) の結果を踏まえて [Mi2] を拡張し、両者の積分表示式の対応関係としても明示的に与える。

## 4. 研究成果

### (1) 楕円量子群 $U_{q,p}(B_N^{(1)})$ の Drinfeld 余積と変形 $W$ 代数

前年度に得た  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$  の楕円カレントに対する Drinfeld 余積の定式化及び単線連結型の  $\widehat{\mathfrak{g}}$  の場合の変形  $W$  代数との関係を示した成果を拡

張して,  $\hat{\mathfrak{g}} = B_N^{(1)}$  の場合に Drinfeld 余積に基づく新しい繋絡作用素を導出し, その合成積として対応する  $B_N^{(1)}$  型の変形  $W$  代数の生成母関数の候補を導出した. これは, コセット型の  $W$  代数である Fateev-Lukyanov による  $WB_N$  代数の量子変形を与えることが期待される. 実際に得られたものが,  $U_{q,p}(B_N^{(1)})$  の楕円カレントから構成される遮蔽作用素と可換になることのチェックは現在進行中である.

(2) **Felder の楕円量子群の中心拡大  $E_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の定式化とその  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  との同型の証明**

① Felder によって, Faddeev-Reshetikhin-Semenov-Tian-Shansky-Takhtajan (FRST) 形式に基づいて定式化された面型楕円量子群の中心拡大  $E_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  を,  $p$  の形式的中級数環上の位相代数として定式化した.

② ①で得た  $E_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  が, 代表者らによって定式化された Drinfeld 型生成元による楕円量子群  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  と  $H$ -ホップ亜代数として同型となることを示した. 証明のポイントは,

全射性に関しては, 前年度に得ていた  $E_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の  $L$ -作用素の Gauss 分解と  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  のハーフカレントとの関係及び  $L$ -作用素の Gauss 成分が対角成分に近いものから漸化的に決まってくる構造であり,

単射性に関しては, アフィン量子群  $U_q(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の任意の表現を楕円量子群の表現へと持ち上げる準同型写像の構成とそれによって, 議論が三角型の場合へと帰着されることである.

(3)  **$L$ -作用素の量子小行列式の定式化と  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の中心元の構成**

$R$  をダイナミカル楕円  $R$  行列とする  $RLL$ -関係式に基づいて,  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の  $L$ -作用素に対する量子小行列式を定式化した. これにより, 通常の行列式論における Laplace 展開に類似の展開式や,  $L$ -作用素の逆行列成分の  $L$ -作用素の成分による表示などが求まり, これによって,  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の  $H$ -ホップ亜代数構造に必要な対合射の定義付けが完成した. また,  $L$ -作用素の Gauss 成分 (= ハーフカレント) の量子小行列式による表示を求め, 特に,  $L$  の量子行列式が  $L$  の Gauss 分解の対角成分のシフト積で与えられることを示した. この表示に基づく直接計算により,  $L$  の量子行列式が  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の中心元となることを明らかにした.

(4) **楕円関数的重み関数と面型楕円  $q$ -KZ 方程式の積分分解の導出**

① 楕円量子群  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$  のレベル 1 最高ウェイト既約表現の繋絡作用素の合成積のトレースとして面型楕円  $q$ -KZ 方程式の形式的楕

円超幾何積分分解を構成した. 得られた積分分解は, 三角関数型の場合に三町・野海によって得られていた非対称 Macdonald 関数の積分表示の楕円類似を与えることが期待される.

② ①の積分分解の被積分関数を位相関数部分と重み関数部分に分離する明確なルールを見出して, 重み関数の明示式を導出した. この重み関数は, 三角関数型において既知のもの楕円関数的かつダイナミカルな類似を与える. さらに, 繋絡作用素の交換関係に基づいて重み関数の変換式を導き, 変換行列として正しくダイナミカルな楕円  $R$  が現れることを示した. また, この変換式に基づいて, 楕円ヘッケ環を関数空間上の作用素として定式化し, 重み関数は, このヘッケ環の作用に関して表現の基底をなすことを示した.

現在, 面型楕円  $q$ -KZ 方程式の積分分解への楕円アフィンヘッケ環の作用を考察中である.

**展望**

本研究は, KZ 方程式の解と Calogero-Sutherland 模型の固有関数である Jack 多項式との対応を謳う Cherednik-Matsuo 対応を,  $q$ -差分かつ楕円関数的に拡張して, 面型楕円  $q$ -KZ 方程式の解に基づいて楕円 Ruijsenaars 模型の固有関数の明示式を導出し,  $q$ -差分三角関数型の場合に現れる Macdonald 多項式の楕円関数類似を定式化することが目的であった. 楕円量子群  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$  の表現に基づいて, 面型楕円  $q$ -KZ 方程式の形式的積分分解や重み関数が導出でき, さらにそれはそれへのアフィンヘッケ環の楕円関数類似の作用も議論できるようになったことは, 研究の遂行に向けての大きな成果である. また, 楕円量子群  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  の  $L$ -作用素の量子行列式や小行列式が定式化され, 中心元が理解できたことで, 今後, 楕円量子群の表現に基づく楕円 Ruijsenaars 模型の調和解析的な研究が進展すると期待出来る.

一方, 最近, 楕円重み関数は Okounkov が提唱する楕円 stable envelopes と同一視できることが期待され, これに基づく楕円量子群の同変楕円コホモロジー上の表現の構成に向けた研究が活発化している. 本研究の成果は, この流れに直接的な寄与を与えるものであり, 国内外から多くの注目を集めている.

< 引用文献 >

[K] An Elliptic Algebra  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$  and the Fusion RSOS Model, H.Konno, *Comm.Math.Phys.*, **195** (1998) 373–403.  
 [JKOS] Elliptic Algebra  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ : Drinfeld Currents and Vertex Operators, M.Jimbo, H.Konno, S.Odake and J.Shiraishi, *Comm. Math. Phys.* **199** (1999)605–645.  
 [K09] Elliptic Quantum Group  $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ , Hopf Algebroid Structure and Elliptic Hypergeometric

Series, H.Konno, *J. Geom. Phys.* **59**, 1485-1511 (2009)

[KKW] The Vertex-face Correspondence and Correlation Functions of the Fusion Eight-vertex Model I: the General Formalism, T.Kojima, H.Konno and R.Weston, *Nucl. Phys.* **B720** (2005) 348-398.

[CKSW] Exact Form-factor Results for the Longitudinal Structure Factor of the Massless  $XXZ$  Model in Zero Field, Jean-Sébastien Caux, H.Konno, Mark Sorrell and Robert Weston, *Journal of Statistical Mechanics* P01007, 40pages, (2012)

[EK] Macdonald's Polynomials and Representations of Quantum Groups, P.I.Etingof and A.A.Kirillov Jr., *Math.Res.Lett.* **1** (1994) 279-296.

[Mil] Macdonald's Operator from the Center of the Quantum Universal Enveloping Algebra  $U_q(\mathfrak{gl}(N))$ , K. Mimachi, *IMRN* No.10 (1994) 415-424.

[MY] Singular Vectors of the Virasoro Algebra in terms of Jack Symmetric Polynomials, K.Mimachi and Y.Yamada, *Comm. Math. Phys.***179** (1996) 401-416.

[AKOS] Quantum  $W_N$  Algebras and Macdonald Polynomials, H.Awata, H.Kubo, S.Odake, J.Shiraishi, *Comm.Math.Phys.* **174** (1995) 447-455.

[Ch] Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equations and Affine Root Systems, I. Cherednik, *Comm.Math.Phys.***150**(1992)109-136.

[Ka]  $R$ -Matrix Arising From Affine Hecke Algebras and Its Application to Macdonald's Difference Operators, S.Kato, *Comm.Math.Phys.* **165**(1994)533-553.

[Mi2] A Solution to Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equations and Its Application to Eigenvalue Problems of the Macdonald Type, K.Mimachi, *Duke Mathematical Journal* **85** 635-658 (1996)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計3件)

- ① H. Konno, “Elliptic Quantum Groups  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  and  $E_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ ”, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 査読有, 掲載決定
- ② H. Konno and K.Oshima, “Elliptic Quantum Algebra  $U_{q,p}(B_N^{(1)})$  and Vertex Operators”, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, **B62**, 97-148 (2017)
- ③ R.M.Farghly, H. Konno and K.Oshima, “Elliptic Algebra  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$  and Quantum  $Z$ -algebra”, *Algebras and Representation Theory*, 査読有, **18**, 103-135 (2015).

〔学会発表〕(計6件)

- ① H. Konno, “Elliptic Weight Functions and Finite Dimensional Representations of Elliptic Quantum Groups”, 国際会議 “Elliptic Hypergeometric Functions in Combinatorics, Integrable Systems and Physics” (招待講演) 2017年3月20日~2017年3月24日 Univ. of Vienna, Vienna, Austria.
- ② H. Konno, “Elliptic  $q$ -KZ Equation and the Weight Functions”, 国際会議 “Recent Advances in Quantum Integrable Systems” 2016年8月22日~2016年8月26日 Univ. of Geneva, Geneva, Switzerland.
- ③ H. Konno, “Elliptic  $q$ -KZ Equation and the Weight Functions”, 国際会議 “Classical and Quantum Integrable Systems 2016”, 2016年7月11日~2016年7月15日 Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia.
- ④ H. Konno, “楕円量子群入門”, 神戸大学理学部数学科集中講義 (招待講演) 2014年12月1日~2014年12月5日 神戸大学
- ⑤ H. Konno, “Elliptic Quantum Group, Drinfeld Coproduct and Deformed  $W$ -algebras”, 国際会議 “Recent Advances in Quantum Integrable Systems” 2014年9月1日~2014年9月5日 Univ. of Burgundy, Dijon, France.
- ⑥ H. Konno, “Elliptic Quantum Group  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ , Drinfeld Coproduct and Deformed  $W$ -algebras”, RIMS 表現論セミナー (招待講演) 2014年7月11日 京都大学数理解析研究所

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

今野 均 (HITOSHI KONNO)  
東京海洋大学・学術研究院・教授  
研究者番号: 00291477

### (2) 連携研究者

神保 道夫 (JIMBO MICHIO)  
立教大学・理学部・教授  
研究者番号: 80109082

野海 正俊 (NOUMI MASATOSHI)  
神戸大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 80164672

三町 勝久 (MIMACHI KATSUHISA)  
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 40211594

大島 和幸 (OSHIMA KAZUYUKI)  
愛知工業大学・基礎教育センター・准教授  
研究者番号: 30547980