

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400047

研究課題名(和文) Faith 予想を中心に quasi-Frobenius 環の研究

研究課題名(英文) Study on quasi-Frobenius rings based on the Faith conjecture

研究代表者

大城 紀代市 (Oshiro, Kiyochi)

山口大学・その他部局等(理学)・名誉教授

研究者番号：90034727

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：1966年、Ososkyにより左、右入射的完全環は quasi-Frobenius 環であることが示され、片側入射の場合でも quasi-Frobenius 環になるかという問題が提起された。1972年 Faith が彼の著書 "Algebra II" でこの問題は、準素環でも否定的であると予想した。1993年 Baba-Oshiro により準素環上の直既約射影的加群の入射性が simple 入射性と同値であることが示された。これを用いて Faith 予想を研究し、Faith 予想を斜体とその上の両側ベクトル空間の問題に置き換え、大きな進展になる結果を得た。関連して4元数の研究も行った。

研究成果の概要(英文)：In 1966, Ososky showed that a right and left self-injective perfect ring is a quasi-Frobenius ring, and raised the problem whether this is true or not for one sided selfinjective ring. In 1972, in his book "Algebra II", Faith conjectured in the negative for this problem. In 1993, Baba-Oshiro showed that, for an indecomposable projective module over a semiprimary ring, right injectivity is equivalent to simple injectivity. Using this result, we studied Faith conjecture. We could showed that Faith conjecture is translated to a problem whether there exist division ring D and a two-sided (D,D) -space $V = D \times D$ for which V is isomorphic to its dual space. Using this result, we obtained several results which improve the study of Faith conjecture. From the study of division ring D , we studied Hamilton's quaternion ring $H(D)$ and obtained several fundamental results. For commutative field F , $H(F)$ has been studied in algebraic number theory. We studied the relationships between $H(D)$ and $H(F)$.

研究分野：代数学

キーワード：アルチン環 QF-環 Faith 予想 Complex ring Quaternion ring Octonion ring

1. 研究開始当初の背景

1966年、B.L.Osofskyにより完全環で左、右入射的環は quasi-Frobenius 環であることが示された。この結果から自然に片側入射的完全環も quasi-Frobenius 環であるかという問題が提起された。この問題に対して1972年 C. Faith は、彼の有名な著書“Algebra II”で、この問題は完全環より弱い半準素環でも成り立たないであろうと予想した。これが Faith 予想の由来である。その後、これらの問題や予想に対していくつかの派生的な研究結果が見られたものの決定的な結果は皆無の状態が続いた。1993年、Y. Baba - K. Oshiro は、半準素環の直既約右射影加群が入射的になる条件がより弱い単純入射的である条件と同値であることを示した。この結果は、アルチン環で、直既約右射影加群が入射的になるための Fuller の定理を拡張したものである。研究代表者は、この結果が、Faith 予想に応用されると思ったのだが、成功せず、長年この予想を追い求める羽目になってしまった。これが、研究の背景である。

研究を推進する過程で、斜体の研究が深く関係し、Hamilton の Quaternion (4元数) など斜体の研究へと繋がっていった。

2. 研究の目的

本研究の主目的は、Faith 予想を解決することである。まだ完全解決には至っていないもののいくつかの重要な結果は得られた。Faith 予想を研究する過程で、Tarski の集合論における定理や、Erdos-Kaplansky の斜体の無限直積の次元の結果を用いたりしながら研究を進め、Faith 予想を学生でも理解できる次のような簡潔な問題に言い換えることが出来、この観点から研究を推進している。

問題：斜体 D と D 上の両側ベクトル空間 V があって、左次元 $a >$ 右次元 b で、 a, b はいずれも無限で、 V とその双対空間との間に (D, D) 同型がある。このような D と両側ベクトル空間 V があるか？

この問題が Faith 予想の本質である。この結果から斜体の研究へと繋がり自然に Hamilton の Quaternion (4元数) の研究を始めた。本研究期間中、そして現在も時には Faith 予想、時には Quaternion の研究を行っている。

3. 研究の方法

I. Faith 予想については、斜体 D とその上の両側ベクトル空間 V があって、その左右の

次元が無限で、 V とその双対空間 V^* との間に (D, D) 同型写像：

$$V \sim V^*$$

がある。このような D と V が存在するか？ Faith 予想の本質はこの問題にあるといえる。Faith は片側入射的な完全環は quasi-Frobenius 環であるかという Osofsky の問題に対して、準素環でも否定的であろうと予想したのであるが、我々の言い換えにより Faith 予想を分析すると、上述のような斜体 D 、両側 D ベクトル空間 V が存在すると Faith は予想しているのである。しかし、我々の長年の研究からこのような D, V は存在しない、従って、Faith の予想は正しくないという強い良い思いで研究に取り組んでいる。

II. Quaternion は1843年、実数体、複素数体を含む斜体として発見された数である。その後(1984年) Kayley と Graves によって、Octonion (8元数) が発見された。Quaternion は、Frobenius によって、実数体上の有限次元の斜体(非可換体)は Quaternion だけであるという驚異的な結果が示され、Wedderburn により有限な斜体は、可換体であることが示された。このあたりから、多元環の研究が始まり、連綿と発展し、現代の環論・表現論につながっている。Quaternion は現代代数学のルーツの一つである。

実数の上で研究された Quaternion はその後一般の体上で研究され、代数的整数論の一分野として発展している。本研究では、一般の環 R の上で Complex ring $C(R)$, Quaternion ring $H(R)$, Octonion ring $O(R)$ を定義して、特にアルチン環 R 上のこれらの環の構造を環論・表現論の手法を用いて研究している。

4. 研究成果

Faith 予想についての成果：

斜体 D 上の両側無限次元ベクトル空間 V について V とその双対空間 V^* とが同型になることがあるかということが問題になるが、更に言い換えを進化させ、 V として一つの元から生成される両側 (D, D) -空間 $V = D \times D$ の場合を研究すればよいことを示すことができ、この結果から多くの場合 V と V^* は (D, D) -同型にはならないことを示すことができた。例えば、 D が体でも、中心上有限次元でも、アレフゼロ次元であっても V と V^* は同型にはならないことを突き止めた。これは、Faith 予想の研究の大きな進展になる研究成果である。この成果は、2015年、中国杭州大学で開催された日中韓 International Ring Theory Conference の組織委員から特別寄稿の依頼があり、分担者小池との共同論文として

Recent Development of Faith conjecture なるタイトルで Front. Math. China, 2017

に掲載された。

Quaternion についての成果：

Complex ring, Quaternion ring, Octonion ring については十分な成果があがっている。R を環とし、自由加群 $M = R + iR + jR + kR$ を考える。ここで、1, i, j, k は自由基底。これらの基底に通常のように Kayley-Graves の乗積表により、積を入れると自然に環になる。例えば、

$$\begin{aligned} ij &= k, & jk &= i, & ki &= j \\ ji &= -k, & kj &= -i, & ik &= -j \end{aligned}$$

このように定義した環を R 上の Quaternion ring と呼び、 $H(R)$ と書く。2 個の基底 1, i をもつ自由加群から Complex ring $C(R)$, 8 個の基底をもつ自由加群から Octonion ring $O(R)$ ができる。

次の 2 つ定理は韓国の G. Lee との共同研究の成果であり、上記の国際学会の特別講演で研究代表者が発表し、論文としては、Quaternion rings and Octonion rings なるタイトルで Front. Math. China, 2017 に掲載された。

定理 1. R が Frobenius 代数 ならば、 $C(R)$, $H(R)$, $O(R)$ も Frobenius 代数 である。

定理 2. R が quasi-Frobenius 環 ならば、 $C(R)$, $H(R)$ も quasi-Frobenius 環 であり、R の標数が 2 のときは $O(R)$ も quasi-Frobenius 環 である。

これらの結果を発表したとき気が付かなかったのだが、定理 2 から直ちに次の結果が従う。

定理 3. D が斜体 ならば、 $C(R)$, $H(R)$ も quasi-Frobenius 環 である。

この結果を更に詳しく調べて次の結果を得た。

定理 4. 標数が 2 でない斜体 D 上の $C(D)$, $H(D)$ は単純環 である。

このような経緯を経て、Quaternion の歴史を調べてみると、可換体 F 上の Quaternion $H(F)$ について次の結果が代数的整数論の古典理論の一つとして知られていることがわかった。

定理 5. 標数が 2 でない可換体 F 上の $H(D)$ は斜体か F 上の 2 次の行列環 と同型 である。

この定理は、数論的手法で示されている。我々の定理 4 は環論の理論を用いた方法で示した結果である。 $H(F)$ より $H(D)$ の方が

一般的であり、分担者の菊政、小池との共同研究で $H(D)$, $H(H(D))$, $C(D)$, $H(C(D))$, $C(C(D))$, $C(H(D))$ などについての構造理論を構築している。昨年、山梨大学で行われた第 50 回 環論および表現論研究集会で、得られた結果の概要を研究代表者が発表し、その報告集に掲載された。現在、しかるべきジャーナルに投稿するため、最終版の論文に仕上げている段階である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

[1] 菊政 勲・小池寿俊・大城紀代市
Complex rings, Quaternion rings and Octonion rings
Proceedings of the 50th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 2018, 74-83, 査読無

[2] 小池寿俊・大城紀代市
Recent development of Faith conjecture
Front. Math. China 2017, 12(1):143-155, 査読有

[3] G. Lee・大城紀代市
Quaternion rings and Octonion rings,
Front. Math. China 2016, 11(4):143-155
査読有

[学会発表](計 3 件)

[1] 菊政 勲・小池寿俊・大城紀代市
Complex rings, Quaternion rings and Octonion rings
第 50 回環論および表現論研究集会、平成 29 年、山梨大学

[2] G. Lee and K. Oshiro
Quaternion rings and Octonion rings
第 7 回日 中 韓国際環論研究集会、平成 27 年、中国杭州大学

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大城 紀代市 (OSHIRO Kyoichi)
山口大学・その他部局・名誉教授

研究者番号：90034727

(2) 研究分担者

菊政 勲 (KIKUMASA Isao)
山口大学・創成科学研究科・教授)

研究者番号：70234200

小池 寿俊 (KOIKE Kazutoshi)
沖縄工業高等専門学校・総合科学科・教授

研究者番号：70234200

(3) 連携研究者

馬場 良始 (BABA Yositemo)
大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：10201724

山浦 浩太 (YAMAURA Kota)
山梨大学・医学工学総合研究部・助教

研究者番号：60633245

(4) 研究協力者

()