

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 8 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400049

研究課題名(和文) Stanley-Reisner イデアルの算術階数とそのべきの射影次元

研究課題名(英文) Arithmetical rank of Stanley-Reisner ideals and projective dimension of their powers

研究代表者

寺井 直樹 (Terai, Naoki)

佐賀大学・教育学部・教授

研究者番号：90259862

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：多項式環の被約単項式イデアルの記号的べきの射影次元に関して研究した。強良被覆グラフの辺イデアルの場合に記号的べきの射影次元に関して広義単調増加であることを示した。良被覆である2部グラフは強良被覆グラフであり、2部グラフの辺イデアルの記号的べきは通常べきに等しいことから、良被覆である2部グラフの辺イデアルの通常べきの射影次元はべきの大きさに関して広義単調増加であることも示せたことになる。さらに、次数1の頂点をもつグラフの辺イデアルに対しても記号的べきの射影次元に関して広義単調増加であることを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied the projective dimension of symbolic powers of squarefree monomial ideals in a polynomial ring. We proved that the projective dimension of the symbolic power of the edge ideal of a very well-covered graph increases with respect to the exponent. Since a well-covered bipartite graph is very well-covered and since the symbolic powers and ordinary powers coincide for the edge ideal of a bipartite graph, it implies that the projective dimension of the ordinary power of the edge ideal of a very well-covered graph increases. Moreover, we showed that the projective dimension of the symbolic power of the edge ideal of a graph with a vertex of degree one increases with respect to the exponent.

研究分野：可換環論

キーワード：辺イデアル 射影次元 記号的べき

1. 研究開始当初の背景

イデアルの算術階数とは、そのイデアルが定義する空間がスキーム構造を無視して何枚の超曲面の交わりとして表現されるかという最小数、あるいは、イデアルの言葉では、そのイデアルと根基イデアルを同じくするイデアルの中で極小生成系の元の個数が最小であるものの極小生成系の元の個数である。イデアルの算術階数を求めることは可換環論・代数幾何学における伝統的な問題である。Stanley-Reisner イデアルの場合、その Stanley-Reisner 環の射影次元が Stanley-Reisner イデアルの算術階数の下限を与えていることが知られている。それで、いつこの二つの不変量が一致するかを問題にしてきた。これまでの研究成果として次のような場合に上の二つの不変量が一致することを示すことにより算術階数を決定してきた。

- ・算術次数が最小次数に十分近い Stanley-Reisner イデアル
- ・生成元の個数とそのイデアルの高さに十分近い Stanley-Reisner イデアル
- ・次数 2 の線形自由分解を持つ Stanley-Reisner イデアル (
- ・単体的複体が 1 次元 Gorenstein となる Stanley-Reisner イデアル
- ・次数 2 の squarefree lexsegment イデアル
- ・生成元の個数が 5 以下の Stanley-Reisner イデアル
- ・算術次数が 4 以下の Stanley-Reisner イデアル
- ・Castelnuovo-Mumford 正則数が生成元の個数より 2 だけ小さい線形自由分解を持つ Stanley-Reisner イデアル

さらに基盤研究 (C)「Stanley-Reisner イデアルの極小自由分解と算術階数」(平成 23 ~ 25 年度)の研究成果のひとつとして、研究代表者は連携研究者の木村杏子とともに

に林の辺イデアルの算術階数はその剰余環の射影次元に等しいという Barile の予想に対して肯定的な答えを与えた。また、Stanley-Reisner イデアルが高さ 3 で Gorenstein であるとき算術階数が 3 であることも示した。これらの結果を受けて、さらに他の単項式イデアルのクラスに対しても算術階数を決定できることが期待された。

2. 研究の目的

被約単項式イデアルである Stanley-Reisner イデアル及び、多項式環を Stanley-Reisner イデアルで割った環である Stanley-Reisner 環は可換環論的観点のみならず Stanley-Reisner 環から定まる単体的複体を通して組合せ論、トポロジーとも深く関係しており、とても興味深い研究対象である。本研究は Stanley-Reisner イデアル及び Stanley-Reisner 環の極小自由分解の長さである射影次元と Stanley-Reisner イデアルの算術階数との関係をまず問題とする。Stanley-Reisner イデアルの場合、その Stanley-Reisner 環の射影次元が Stanley-Reisner イデアルの算術階数の下限を与えていることが知られている。それで、いつこの二つの不変量が一致するかが問題の焦点となる。本研究においては弦グラフの辺イデアルについて 2 つの量が一致することを示すことを目標とした。2 つ目の目標は Stanley-Reisner イデアルの記号的べきの射影次元がべきに関して広義単調増加することを示すことである。本研究では強良被覆グラフの辺イデアルの場合に焦点を当てて研究することとした。

3. 研究の方法

Stanley-Reisner イデアルの極小自由分解についてその可換環論的、組合せ論的性質

を考察するために、まず具体的な Stanley-Reisner イデアルについて組織的に射影次元及び算術階数の計算を行い、データを収集した。それらのデータから帰納的に組合せ論的法則、代数的メカニズムを推測し証明しようと試みた。また、一般の次数つき環と相違に注意をはらいつつ、それらにも共通する性質をグレーブナー基底の理論を用いて導出しようとした。また、より抽象的にホモロジカルな性質を圏論的に考えた。

以上のように、組合せ論的観点、位相幾何学的観点、純可換環論的観点、圏論的観点のそれぞれの長所をとりいれ、研究代表者、研究分担者の間で緊密な連絡をとりながら総合的に研究していった。

4. 研究成果

本研究の目的は、Stanley-Reisner イデアルの算術階数と極小自由分解についてその可換環論的、ホモロジー代数的性質を考察し、組合せ論的応用を探ることにある。イデアルの算術階数とは、そのイデアルが定義する空間が集合として何枚の超曲面の交わりとして表現されるかという最小数、あるいはイデアルの言葉では、そのイデアルと根基イデアルを同じくするイデアルの中で極小生成系の元の個数が最少であるものの極小生成系の元の個数である。イデアルの算術階数を求めることは可換環論・代数幾何学における伝統的な問題である。Stanley-Reisner イデアルに関してはその算術階数はその剰余環の極小自由分解の長さ、つまり、その剰余環の射影次元以上であることが知られている。そこで、これら2つの不変量がいつ等しくなるかが問題となる。林の辺イデアルの算術階数はその剰余環の射影次元に等しいことはすでに証明していたのであるが、その一般化として弦グラフに対しても同様のことがいえるのではないかと予想した。そして、ラジカルをとると弦グラフを与えるような生成系の候補を与えた。

また、Stanley-Reisner イデアルの記号的べきの射影次元に関して研究した。高さ2の Stanley-Reisner イデアルの場合には射影次元はべきに関して広義単調増加であることはすでに示していたのであるが、それを論文としてまとめ出版した。強良被覆グラフの辺イデアルの場合にも記号的べきの射影次元に関して広義単調増加であることを示した。良被覆である2部グラフは強良被覆グラフであり、2部グラフの辺イデアルの記号的べきは通常べきに等しいことから、良被覆である2部グラフの辺イデアルの通常べきの射影次元はべきの大きさに関して広義単調増加であることも示せたことになる。

さらに、次数1の頂点をもつグラフの辺イデアルに対しても記号的べきの射影次元に関して広義単調増加であることを示した。Sequentially Cohen-Macaulay である2部グラフは次数1の頂点をもち、2部グラフの辺イデアルの記号的べきは通常べきに等しいことから、Sequentially Cohen-Macaulay である2部グラフの辺イデアルの通常べきの射影次元はべきの大きさに関して広義単調増加であることも示せたことになる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 7 件)

1, L.H. Hoa, T.N.Trung, K. Kimura, N.Terai, Stability of depths of symbolic powers of Stanley-Reisner ideals, J. Algebra 473 (2017), 307-323 査読有.

2, K. Kimura, N.Terai, and K.Yoshida, Arithmetical rank of a squarefree monomial ideal whose Alexander dual is of deviation two, Acta Mathematica Vietnamica 40(2015) 375-391 査読有

3, N.Terai and K.Yoshida, Multiplicity and

Castelnuovo-Mumford regularity of Stanley-Reisner rings, Acta Mathematica Vietnamica 40(2015) 11-32 査読有

4, K. Kimura and N.Terai, Arithmetical rank of Gorenstein squarefree monomial ideals of height three, Journal of Algebra 422(2015) 264-289 査読有

5, S. Saeedi Madani, D. Kiani, N.Terai, Gorenstein and Sr path ideals of cycles. Glasg. Math. J. 57(2015) No.1, 7-15 査読有

6, M.R.Pournaki, S.A. Seyed Fakhari, N.Terai, and S.Yassemi, Survey article: Simplicial complexes satisfying Serre's condition: a survey with some new results, Journal of Commutative Algebra 6 (2014) 455-483 査読有

7, N.Terai and N.V.Trung, On the associated primes and the depth of the second power of squarefree monomial ideals, Journal of Pure and Applied Algebra 215(2014) 2473-2480 査読有

〔学会発表〕(計 5 件)

1, 寺井直樹, Arithmetical rank of squarefree monomial ideals --focus on methods, The Japan-Vietnam workshop on commutative algebra, 平成 28 年 9 月 22 日, 明治大学

2, 寺井直樹, Licci squarefree monomial ideals, International conference and the 8-th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra 平成 28 年 3 月 25 日 Vitetnam Institute for Advanced Study in Mathematics, Ha Long, Vietnam

3, 寺井直樹, Arithmetical rank of squarefree monomial ideals, International workshop on commutative algebra, 平成 27 年 12 月 26 日, Ha Long, Vietnam

4, 寺井直樹, Projective dimension of powers of squarefree monomial ideals, The Japan-Vietnam seminar on commutative algebra, 平成 27 年 9 月 22 日, 明治大学

5, 寺井直樹, Stanley-Reisner イデアルのべきの射影次元、組み合わせ論と可換代数セミナー 平成 26 年 9 月 22 日, 宮島コラルホテル

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織
(1)研究代表者
寺井 直樹 (TERAI NAOKI)
佐賀大学・教育学部・教授
研究者番号：9 0 2 5 9 8 6 2
(2)研究分担者
宮崎 誓 (MIYAZAKI CHIKASHI)
熊本大学・教育学部・教授
研究者番号：9 0 2 2 9 8 3 1

庄田 敏宏 (SHODA TOSHIHIRO)
佐賀大学・教育学部・准教授
研究者番号：10432957

青山 崇洋 (AOYAMA TAKAHIRO)
佐賀大学・教育学部・准教授
研究者番号：60516178

岡田 拓三 (OKADA TAKUZO)
佐賀大学・工学系研究科・准教授
研究者番号：20547012

(3)連携研究者

吉田 健一 (YOSHIDA KENICHI)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：80240802

柳川 浩二 (YANAGAWA KOUJI)
関西大学・工学部・教授
研究者番号：40283006

木村 杏子 (KIMURA KYOUKO)
静岡大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：60572633