様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００５０

研究課題名（和文）リジッド幾何学による退化と一意化の研究

研究課題名（英文）Investigation of degenerations and uniformizations by means of rigid geometry

研究代表者
加藤　文元（Kato, Fumiharu）

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：５０２９４８８０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 非アルキメデス的一意化の高次元の「軌道体バージョン」つまりトーション（ねじれ）付きの一般的な一意化現象の具体的理解という点では、従来知られていたMumfordによる偽射影平面に付随した現象の変形版として、偽射影平面を出力するトーション（ねじれ）付きの新しい一意化の現象を捉えることができた。
(2) リジッド幾何学本体の理論的基盤構築については、新しい空間概念としての「ヘンゼル型リジッド空間」というものについて初めて本格的な理論構築を行なった。これは従来のリジッド空間に比べてその数論幾何的・代数幾何的側面が強化されており、従来のリジッド幾何学では考えられなかったような性質を多く有している。

研究成果の概要（英文）：(1) A totally new p-adic uniformization with torsion in dimension two, which gives rise to a fake projective plane which is, however, non-isomorphic to the Mumford's one, has been observed for the first time, in the course of our enduring investigation for higher dimensional non-archimedean "orbifold uniformization", viz., uniformization with torsion elements.
(2) The full-scale theorization of the so-called "Henselian rigid geometry" has been embarked, probably for the first time in this field of mathematical researches, as a new conceptualization of most modern algebro-geometric and rigid-analytic hybrid spaces, which will, expectedly, enhance the arithmetico- and algebro-geometric aspects of the classical rigid geometry.

研究分野：代数幾何学

キーワード：リジッド幾何学

１．研究開始当初の背景

1960 年代から主に J. Tate や M. Raynaud らによって創始・発展してきたリジッド幾何学は、近年までさまざまな方向に進歩してきた中で、より多角的な応用の方向性と多様な数学的構造の可能性を示唆してきた。特にリジッド幾何学がその導入・発展の当初から有している「非アルキメデス的一意化」の理論は、リジッド幾何学本体の理論的基盤構築のみならず、その多彩な応用の可能性もあいまって極めて強力な理論として認知されるに至っている。こうした背景を踏まえて、この「非アルキメデス的一意化」及びそれに付随した代数多様体の退化の理論を基軸に据え、そこから生じる理論的内容の様々な視座からリジッド幾何学を捉えることで、リジッド幾何学のより多角的な応用可能性のみならず、その基盤構築や、さらにはリジッド幾何学を超えた新しい空間概念や幾何学理論の構想をも構想することが次第に可能な状況となってきていた。これはすでに、以下のいくつかの従来的な数学現象にも顕れていた。

(1) リジッド幾何学は、その理論自体に、いわゆる解析的還元（analytic reduction）の概念があり、これを用いて、自然に解析的空間や代数多様体などの還元や退化と結びつく。特に「非アルキメデス的一意化」はこの退化と一意化のインタラクションが有効に可視化されている理論であり、これを発展させることで、例えば最近とみに耳にするようになったトロピカル幾何学的側面などと有用に結びつくことが予想できる。

(2) また、この結びつきから他分野（例えばグラフ理論的位相幾何学など）との連携を図ることができれば、従来までは極めて困難であった新しい空間（例えば、新しい偽射影平面など）の構築に応用できる可能性も大いにあり得る。

(3) さらに、これらのような応用的展開の中で、リジッド幾何学本体の基盤理論へとフィードバックできるものの中には、特にその Zariski-Riemann 空間の位相幾何学など具体的な現象がすでに見られていた。それによって、リジッド幾何学自身の基盤理論の構築・再編や、それを超克した新しいタイプの空間概念の構想が得られるようになっていた。

以上のような背景から、本研究では特に非アルキメデス的一意化と退化とのインタラクションを中心に据えて、広く多角的にリジッド幾何学を捉えることを目的とすることを構想した。

２．研究の目的

研究の背景に基づいて、本研究では以下の三点をその研究目的の、特に実際的・具体的内容とした：

(1) 代数曲面の退化とそれに付随した非アルキメデス的一意化現象のより詳細な理解：ここにおいては、前述の非アルキメデス的一意化の、それも特にトーション（ねじれ）を含んだ場合に一般化された一意化を高次元で具体的に扱える理論を構築したいという狙いがある。ねじれを含んだ一般的な一意化（いわゆる軌道体一意化）は、代数曲線の場合にはかなりの程度実現されており、報告者の過去の研究などによって多くのことがわかっている。これを高次元について実現することが長年の目標であったが、その技術的困難のため、なかなか実現できないでいた。ここでは、偽射影平面型の代数曲面に的を絞って、ねじれを含んだ一意化の構築に向けた第一歩を踏み出すことが目標とされている。

(2) 関連するトロピカル幾何学的側面の整備および理解の深化：ここでは、上記のような具体的な研究を通して、ねじれを含んだ一意化に現れる現象を還元を通じて退化の現象と結びつけ、特にそのトロピカル幾何学的側面の理論化を目指すことが謳われている。

(3) これらの観点から、新たな応用を検討し新たな視点を獲得する：ここでは退化と一意化の幾何学全般について総体的かつ多角的に考察を深めることで、その関連性についての新たな理論的視座を獲得し、ひいてはリジッド幾何学本体の基盤整備や、その理論自体の拡張・一般化、さらにはそれがあつかう空間概念の拡張と革新をもたらすことが目標とされている。

３．研究の方法

前項の研究目的を達成するために、本研究が採った研究の方法は、次のように具体面と理論面での二つの側面に分けて述べることができる。

(1) 具体的側面の実現に向けて：前項（研究の目的）の(1)においては、特に特定のものとして名指しされた、ある種の代数曲面についての具体的な現象を捉えることが目指されている。これを受けて、本研究ではまず手始めに「具体的な現象の観察を通じて、それらについてその数論的、幾何的構造を丹念に調べる」ことがもっぱらの方法論的方向性となった。より具体的には、これらの特定の一意化および退化現象を解析するために、多くの具体的な計算を行い、その数論的・幾何的構造の詳細を理解するということである。

(2) 理論面での方法：これらの具体相での研究の進展・結果を踏まえて、それと既存理論との関連、およびその応用的展開をさらに進めることが次のステップとなる。そこで、リジッド幾何学全般の基礎について、より深く

研究し、より詳細かつ深層的な理論構築を目指すことが要求される。そこで、リジッド幾何学のみならず、トロピカル幾何学や、これと密接に関連しているベルコヴィッチ幾何学との関連性をも追求するために、それらの専門家との国内・国際的な交流を図ることが要請される。これはもちろん、従来的な研究の文脈においても重要なことではあったが、ここでは特にこれを（基盤理論の）基礎づけと従来理論との関連・応用との再帰的なフィードバックによって遂行するところに、本研究の方法論の特色を据えた。

４．研究成果
以下のことが本研究の直接の成果として得られたので報告する。

(1) まず、非アルキメデス的一意化の高次元の「軌道体バージョン」つまりトーション（ねじれ）付きの一般的な一意化現象の具体的理解という点では、従来知られていた Mumford による偽射影平面に付随した現象の変形版として、これとは本質的に異なるが、偽射影平面を出力する新しい一意化の現象を捉えることができた。これは高次元の非アルキメデス的軌道体一意化が観察された、極めて数少ない珍しい現象であり、今後のさらなる解析が期待される。また、この現象の観察において、その退化現象の詳細な解析と理解が、実際の計算によって明らかにされた。つまり、この場合の「一意化と退化」のインタラクションという現象自体は、極めて満足度の高い具体性を持って捉えられたことになる。さらに、その解析および代数曲面としての特性を明らかにする上で、従来的な理論では補えない部分の議論を、ベルコヴィッチ幾何学の一般論を用いて理論を形成するという、新しい議論の手法を開発したが、これは本研究が謳っていた「トロピカル幾何学やベルコヴィッチ幾何学などの多方面の幾何学との関連性や連携を図る」という方法論的構想が実現したことによるものであり、本研究によってもたらされた、将来に向かって重要度の高い成果の一つである。なお、以上の成果は D. Allcock との共同研究という形で、Tohoku Math. J.から掲載されることが決定している（査読有）。

(2) リジッド幾何学本体の理論的基盤構築という目標については、本研究では特に新しい空間概念としての「ヘンゼル型リジッド空間（Henselian rigid space)」というものについて初めて本格的な理論構築を行なった。これは従来のリジッド空間に比べてその数論幾何的・代数幾何的側面が強化されており、特に Zariski 主定理型の定理が成立するなど、これまでのリジッド幾何学では考えられなかったような性質を多く有している。本研究の具体相の研究遂行から得られたさまざまな研究データの蓄積により、この新しいタイプの空間概念構築にも、極めて大きな範囲での応用的・発展的側面を構想することができた。この研究は、将来的には、新しいタイプの空間概念、いわゆるハイブリッド型空間概念の一般論の構築という壮大な方向性を内蔵しており、続く年度での継続的研究が望まれる。なお、このヘンゼル的リジッド空間の一般論については、現在その集大成とも言える文献を鋭意執筆中であるが、その一部はすでに Taiwanese Math. J.から掲載されることがすでに決定している（査読有）。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

①G. Cornelissen, F. Kato, J. Kool,
A combinatorial Li-Yau ineqality and rational points on curves, Math. Ann. **361**, no. 1-2, 2015, pp. 211-258（査読有）
doi:10.1007/s00208-014-1067-x
②F. Kato, K. Ohnoshi,
Buchberger stratification on the space of polynomials, Kumamoto J. Math. **28**, 2015, pp. 1-10（査読有）
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~kjm/BKI/kjmpdf/KJM-28/v28-1-kato-ohnoshi.pdf
③D. Allcock, F. Kato,
A fake projective plane via 2-adic uniformization with torsion, Tohoku Math. J. **69**, No. 2, June 2017, pp. 221-237.（査読有）
④F. Kato,
On Henselian rigid geometry, Taiwanese Journal Mathematics, 21, No. 3, June 2017, pp. 531-547.（査読有）

〔学会発表〕（計　５件）

①F. Kato, "Fake projective planes", The 4th South Kyushu workshop on algebra --- complex ball quotients and algebraic geometry, July 22, 2014, Kumamoto University, Kusunoki Kaikan reception hall（組織委員・基調講演）
② F. Kato, "From Tate curves to Zariski-Riemann spaces --- A guide to a birational approach to rigid geometry", Higher Invariants --- Interactions between Arithmetic Geometry and Global Analysis, Aug. 28 & Sep. 1, 3, 5, 2014, Universität Regensburg, Germany（招待講演・連続講義）
③F. Kato, "Non-archimedean geometry --- past and present", A Symposium on the History of Functional Analysis, May 9, 2015, School of Mathematics, Northwest University, Xian, China（招待講演）
④ F. Kato, "Zariski Main Theorem for henselian rigid spaces", Conference "Non-archimedean analytic geometry:

Theory and Practice", Aug. 25, 2015, Maison de la Culture, Papeete, Tahiti（招待講演）
⑤F.Kato, "On Henselian rigid geometry", Conference "Algebraic Geometry in East Asia 2016", Jan. 19, 2016, University of Tokyo（招待講演）

〔図書〕（計　２件）
①加藤文元，中井保行『天に向かって続くかず』日本評論社，2016 年，216 頁
②加藤文元『リーマンの数学と思想』共立出版，2017 年，187 頁

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
加藤　文元　（FUMIHARU. Kato）
東京工業大学・理学院数学系・教授
研究者番号：50294880

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者
(　　　)