様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

科研費 KAKENHI

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２７ 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００５２

研究課題名（和文）誘導される捩れ対による三角圏の研究

研究課題名（英文）Induced torsion structures on triangulated categories

研究代表者
加藤　希理子（Kato, Kiriko）
大阪府立大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授
研究者番号：００３４７４７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：捩れ対とは、三角圏を部分圏の貼り合わせとして表すことである。調べたい三角圏を部分圏ごとに調べられる利点があるだけでなく、どのような捩れ対を有するかによって圏を特徴づけることもできる。得られた研究成果は、捩れ対の一般化に関するものと、特殊な捩れ対を有する三角圏に関するもので、主として以下の2点である。（1）捩れ対の直交性条件を緩めた一般化捩れ対を研究して、商圏の捩れ対と対応することを示した。（2）捩れ対の高次元化であるN角形ルコルマンを有する三角圏として、N複体（微分写像がN回の合成で消える）に注目し、N複体の導来圏が（N-1）次上半三角行列環の導来圏に三角同値であることを示した。

研究成果の概要（英文）：If a triangulated category has a torsion pair, then it is a category of extensions of subcategories. Decomposition into subcategories makes analysis simpler. Sometimes existence of torsion pairs may characterize categories. Our results consist mainly of two points: (1) We studied generalized torsion pairs with milder condition on orthogonality. We showed that they correspond with torsion pairs of quotient categories. (2) We are interested in categories of N-complexes since it has N-gons of recollements which is multiplied and recursive recollements. As a consequence, we showed that a derived category of N-complexes over a ring is triangle equivalent to that of ordinary (2-)complexes of upper triangular matrix rings over the ring.

研究分野：代数学

キーワード：環論　ホモロジー代数　圏論

１．研究開始当初の背景
加群の圏、複体の圏などの加法圏を調べるために、より小さな部分圏に分解することは、自然な手法である。三角圏の場合、最も基本的なものが半直交分解であり、商函手が随伴関手を有し、商圏が部分圏として実現される。発展形として、ルコルマン、多角形ルコルマンがあり、順に対称性が高くなる。
捩れ構造は、加法圏を調べるときの基本的な道具であると同時に、半直交分解をなしうる部分圏の特徴づけや分類への問題意識を提起している。例えば、ルコルマンと密接に関係するスマッシング部分圏の特徴付け（スマッシング予想）は代表的なものである。

２．研究の目的
これらの捩れ構造が生ずる仕組みを解明することが研究目的である。
三角圏に備わったどのような性質が捩れ構造を導くのか。特別な三角函手の定義する部分圏なのか。たとえば環上の導来圏であれば、環のどのような性質によって、捩れ構造がもたらされるのか。これらを明らかにしたいと考えた。

３．研究の方法
本研究では特に、他の圏の捩れ構造から誘導される捩れ構造を調べることに焦点を当てる。例えば、アーベル圏 A における捩れ構造が A のホモトピー圏や導来圏の捩れ構造をもたらす場合、あるいは函手の順像や逆像によって引き起こされる捩れ構造、完全列による貼り合わせで生ずる捩れ構造などがこれにあたる。
また、報告例の少ない N 角形ルコルマンを有する三角圏の例を見つけて、具に調べることも、捩れ構造の発生原理を探るために重要である。

４．研究成果

（1）完全列による貼り合わせから誘導される捩れ対の一般化
与えられた圏を直交する三角部分圏の貼り合わせとして表すのが捩れ対である。逆に、2 つの三角部分圏を完全列で貼り合わせると、必ずしも三角圏にはならない。そこで、研究代表者らは、三角圏の貼り合わせが三角圏になるための必要十分条件を求めた。
三角圏 T の三角部分圏 X，Y に対して,貼り合わせの圏 X*Y とは，X の対象 x と Y の対象 y からなる x→t →y→なる完全列にあてはまる対象 t を集めたものをいう．T=X*Y かつ X から Y への射がない（半直交性）場合に，(X,Y)は T の捩れ対であるという．
得られた結果は以下の通りである。

定理１：三角圏 T の三角部分圏の貼り合わせ X*Y が三角部分圏になるための必要十分条件は、商圏 T/(X∩Y)において(X/(X∩Y), Y/(X∩Y))が捩れ対になることである．

U から V への射がない場合に，U*V が三角圏になることは，簡単に確かめられる。定理 1 は、貼り合わせが三角圏になる条件が、本質的には、良く知られた十分条件の一般化であることを示すものである。定理１の証明から、更に次がわかる。

定理２：三角圏 T の三角部分圏 U による商圏 T/U における捩れ対は，T の三角部分圏の対(X,Y)で，T=X*Y かつ U= X ∩ Y　をみたすものと１対１対応する．

定理２の条件をみたす三角部分圏の対を一般化捩れ対と呼ぶことにする．捩れ対の高次元化がルコルマン、多角形ルコルマンであったことを思い起こせば、一般化ルコルマン、一般化多角形ルコルマンがあってしかるべきである。実際、以下を得た。

定理３：(1) 三角圏 T の三角部分圏 U による商圏 T/U におけるルコルマンは，T の三角部分圏の３つ組み(X,Y,Z)で，T=X*Y=Y*Z かつ X ∩ Y，Y ∩ Z を含む最小の三角部分圏が U であるようなものと１対１対応する．
(2) 三角圏 T の三角部分圏 U による商圏 T/U における三角形ルコルマンは，T の三角部分圏の３つ組み(X,Y,Z)で，T=X*Y=Y*Z かつ X ∩ Y，Y ∩ Z，Z ∩ X を含む最小の三角部分圏が U であるようなものと１対１対応する．

定理３から期待されることは，四角形以上の多角形ルコルマンについても、対応する T の部分圏の条件があるだろうということである。少なくとも、定理３と同じ手法では、この条件を突き止めることができなかった。また、商函手に限らず、一般の三角函手によって捩れ対が誘導されるかはまだ部分的な結果に留まっている。今後の課題としたい。

（2）N 角形ルコルマンと N-複体
著しい対称性を呈する三角形ルコルマンがゴレンシュタイン環のホモトピー商圏で発見されたことを受けて、研究代表者らは、多角形ルコルマンを定義し、それらを有する三角圏を研究することになった。
そこで注目したのが N-複体の圏である。N-複体とは、通常の複体と同様に、微分写像を備えた次数付加群である。通常の複体＝2-複体が微分写像 2 回の合成で消えるのに対し、微分写像 N 回の合成で消えるものをいう。ホモロジー計算を動機に 1940 年代に導入され、最近になって、物理学や表現論の様々な側面から研究がなされている。そこで、N-複体の三角圏を構成して、その性質を調べることにした。通常の 2-複体の圏は、次数ごとの分裂完全列を完全列と定義することによって完全圏構造を組み込むことができて、フロベニ

ウス圏となる.したがってその安定圏として、三角圏が得られるが、これがホモトピー類の圏である。研究代表者等は、この構成を高次元化すれば、N-複体のホモトピー類の三角圏が定義できると考えた。

定理 1：(1) 加法圏 B に対して、N-複体の圏 C_N（B）はフロベニウス圏である。
（2）加法圏 B に対して、N-複体のホモトピー類の圏 K_N（B）は三角圏である。

フロベニウス圏の安定圏として構成してみると、通常の N-複体のホモトピー圏から安易に予測されることが成り立つとは限らないことがわかった。たとえば、N-複体のホモトピーは次数-N+1 で、鎖写像がホモトピー的に自明とは、N 通りものホモトピー経由の和になることをいう.懸垂函手も、単なる次数シフトではない。

アーベル圏Aに対してはN-複体のホモロジーを定義することができる。通常は微分写像 1 回分の像と核を比較するのだが、k 回分の像と（N-k）回分の核の比較を k＝1，…，N-1 について直和を取ることになる。ホモロジーが至るところ零であることを輪状と呼び，輪状な複体は三角部分圏 K_N^{ac}（A）をなす。そこで、商圏 K_N（A）/ K_N^{ac}（A）を導来圏 D_N（A）として定義する。
すると、通常の複体で知られている以下の性質は、N-複体に拡張することができる。

定理 2：(1) アーベル圏 A が十分な射影対象を有するとき，右に有界な N-複体に対して、射影分解が存在する.更に A が Ab4 アーベル圏（単射性を保つ直和を備えている）なら，任意の N-複体に対して、射影分解が存在する。
（2）アーベル圏 A が十分な入射対象を有するとき，左に有界な N-複体に対して、入射分解が存在する.更に A が Ab4*アーベル圏（全射性を保つ直積を備えている）なら，任意の N-複体に対して、入射分解が存在する。

定理 3：アーベル圏の完全函手 F:A→B について
（1）A が十分な射影対象を備えた Ab4 圏であれば、F は左導来函手 LF：D_N（A）→ D_N（B）を導く。
(2) A が十分な射影対象を備えた Ab4*圏であれば、F は右導来函手 RF：D_N（A）→ D_N（B）を導く。

定理 4(Krause の定理の一般化)：アーベル圏 A が局所ネーターなグロタンディク圏（フィルター付余極限を許す Ab3 圏でネーター対象からなる生成集合を有するもの）なら、K_N(Inj A）はコンパクト生成であり、そのコンパクト対象はネーター対象の有界導来圏 $D^b{}_N$（noethA）と三角同値である。

N-複体の三角圏を調べる準備が整ったところで、予想外のことが判った。
アーベル圏 A における(N-2)本の連続射
$X^1 \to X^2 \to \cdots \to X^{(N-1)}$
は、非零項（N-1）個以下の N-複体とみなせるので、K_N（A）の部分圏 $\mathrm{Mor}_{(N-2)}$(A)をなす。一方、$\mathrm{Mor}_{(N-2)}$(A)はアーベル圏でもあるので、$\mathrm{Mor}_{(N-2)}$(A)の複体の圏を考えることができる。そこで $\mathrm{Mor}_{(N-2)}$(A)の（通常の）導来圏と A の N-複体の導来圏の構造を比較してみると、これらは三角同値であった。
定理 5：アーベル圏 A に直和が定義され、射影的かつコンパクトな生成元を有するなら、以下の三角同値が成り立つ。

$$D_N(A) \sim D_2(\mathrm{Mor}_{(N-2)}(A))$$

たとえば、環 R 上の N-複体の導来圏は、(N-1)次上半三角行列環 $T_{(N-1)}$(R)上の（通常の）導来圏と三角同値である。

新しい三角圏として調べた N-複体の三角圏が、既知のものと三角同値であったのは、意外な事実であった。N-複体は、様々な観点から調べられているが、ヨーロッパを中心に、特にホモロジーに関する研究が多い。研究代表者らが三角圏構造を明らかにしたことで、これらの研究者から直接の問い合わせが多くあった。

証明は、傾部分圏による三角同値による。すなわち、$\mathrm{Mor}_{(N-2)}$(A)の射影対象は、分裂単射の連続射であり、これらは D_N（A）において傾部分圏 $\mathrm{Mor}_{(N-2)}{}^{sm}$(A)をなす。したがって，Keller の定理によって D_N（A）は $\mathrm{Mor}_{(N-2)}{}^{sm}$(A)上の導来圏と三角同値になる。しかし $\mathrm{Mor}_{(N-2)}$(A)の対象は、米田埋め込みによって $\mathrm{Mor}_{(N-2)}{}^{sm}$(A)にアーベル群を対応させる加法函手と捉えることができる。
今回与えた証明とは別に、$\mathrm{Mor}_{(N-2)}$(A)の 2-複体を、どのような A の N-複体に対応させるか、直接的に函手を構成することも可能であるが、これをまとめることは、次の課題としたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① P. Jorgensen and K. Kato, Triangulated subcategories of extensions, stable t-structures, and triangles of recollements , J. Pure Appl. Algebra, vol.219. no.12, 2015. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.05.029

② O. Iyama, K. Kato, and J. Miyachi, Derived categories of **N**-complexes , J. London Math. Soc. (2) 96 (2017), 687-716., DOI:10.1142/S0219498818500391

③ L. W. Christensen and K. Kato, Totally acyclic complexes and locally Gorenstein rings, J. Algebra and Its Applications, 2 Vol. 17, No. 3 (2018).

〔学会発表〕（計 3 件）

① 加藤希理子 "**多角形ルコルマン -三角圏の対称性** -", **第** 61 **回代数学シンポジウム** , **佐賀大学** , **２０１６年９月**

② Kiriko Kato, "Polygon of recollements", Conference on Triangulated Categories in Algebra, Geometry and Topology,Sttuttgart **大学（ドイツ）** , **２０１６年３月**

③ 加藤希理子 " **導来双対とホモトピー圏’’** , **導来双対ワークショップ** , **東京学芸大学** , 2014 **年** 12 **月**

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kiriko/

６．研究組織

(1)研究代表者

加藤 希理子 (KATO, Kiriko)

大阪府立大学・理学系研究科・准教授

研究者番号 00347478

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：

(4)研究協力者

P. Jorgensen
Newcastle **大学・数学統計科・教授**

L. W. Christensen
Texas **工科大学・数学統計科・教授**

中岡 宏行 (NAKAOKA, Hiroyuki)
鹿児島大学・理学部・准教授

飯間 圭一郎 (IIMA, Kei-ichiro)
国立奈良高専・一般科・准教授

榎本 悠久 (ENOMOTO, Haruhisa)
中村 力 (NAKAMURA, Tsutomu)
松井 紘樹 (MATSUI, Hiroki)
小川 泰朗 (OGAWA, Yasuaki)
久保 祐樹 (KUBO, Yuki)
平山 幸夫 (HIRAYAMA, Yukio)