

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400053

研究課題名(和文)特異点の可換環論

研究課題名(英文)Commutative Ring Theory of Singularities

研究代表者

渡辺 敬一 (WATANABE, Keiichi)

日本大学・文理学部・上席研究員

研究者番号：10087083

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：代数幾何学の特異点は可換環論で記述される。逆に、特異点の幾何的な情報から特異点の可換環論的性質が決まるし、また、いろいろな例を構成することができる。本研究は、特に曲面の孤立特異点に焦点を当て、その特異点での整閉イデアルの性質が、特異点の幾何的な性質とどのように結びつくかを研究した。特に「 p_g イデアル」という性質を導入し、その概念をキーにして、有理特異点、楕円特異点などを見直したことが、大きな成果と言える。また、本研究では、正標数の可換環論の手法を特異点論に導入した「F-特異点」の理論、Hilbert-Kunz 重複度の理論のを用いた特異点の研究も行った。

研究成果の概要(英文)：The singularities in algebraic geometry is described by commutative ring theory. Conversely, the geometric properties of a singularities;arity effects properties of the corresponding commutative ring and thus we can construct many examples of rings via geometric data. In this research, we focused on isolated singularities of algebraic surfaces and studies the properties of singularities by looking at integrally closed ideals of the singularity. In particular, the discovery of concept of " p_g -ideal" is a big success of our research. On the other hand, we used the method of analyzing singularities in characteristic 0 by the aid of commutative ring theory of positive characteristic, so called "F-Singularities". We could get some new properties of Hilbert-Kunz multiplicities.

研究分野：数物系科学

キーワード：Singularity Local rings surface singularity integrally closed ideals log resolution rational singularity elliptic singularity Gorenstein ring

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 12 日現在

1. 研究開始当初の背景

代数幾何学において有理特異点, 端末 (terminal) 特異点, 対数的端末 (log terminal) 特異点 などの重要な特異点の族が定義されている. これらの特異点は, 特異点の解消と, 小平, Grauert-Riemenschneider 消滅定理などを用いて定義されている.

一方, 正標数の手法を用いたイデアル I の密着閉包 I^* の概念が M.Hochster と C.Huneke によって提唱され, この理論とそれに付随したいろいろな正標数の手法を用いることにより, 上述した 代数幾何学の特異点の族の多くが記述されることが, 研究代表者や原伸生などの研究によってわかってきた. 例えば標数 0 での特異点を十分大きい (または無限個の) 標数 $p > 0$ に還元することにより, 有理特異点 と F-有理環が同値対数的端末 (log terminal) 特異点 と F-正則環が同値対数的標準 (log canonical) 特異点 と F-純 (F-pure) 環が同値 (右から左は証明されているが, 逆は予想) が示されている. これらの結果には, これまで研究代表者が受けた科学研究費などにサポートされた, 日本大学文理学部における「特異点論セミナー」で研究の端緒を得たり, 育って行ったものが大変に多い事を付記しておく. 特に本研究では, 特異点の「重複度」の正標数での概念である「Hilbert-Kunz 重複度」の研究を取り上げた.

特に曲面の特異点は, 大変豊富な理論を持ち, 大変興味深い研究対象である. 本研究では, 特に曲面の特異点の整閉イデアルを, そのイデアルの対数的特異点解消のコホモロジー的性質を調べることにより解析した.

このようなイデアルの理論については, J. Lipman が 1970 年代に有理特異点の整閉イデアルに関して, 基本的な性質を示したが, それより「悪い」特異点のイデアル理論は全く手が付けられていなかった.

また, 本研究で取り上げた, good ideal の存在, イデアルの core との関係についてもほとんど知られていなかった.

正標数の手法を用いて定義される Hilbert-Kunz 重複度の概念については, 研究代表者, 研究協力者の渡辺・吉田によっていくつかの基本的な性質が示されていた. また, 概対称数値的半群については, 概 Gorenstein 環との対応の一般論が Barucci-Froebler や明治大学の後藤四郎を中心とするグループによって研究されていた. 具体的な構造については, 3 元生成の時に渡辺と日本大学の大学院生だった成博勝, 沼田崇宏によって決定されていた.

2. 研究の目的

(1) 特異点の局所環のイデアルの性質を幾何的な言葉で表現し, その特徴付け, 存在または不存在の証明, 分類などの問題に応用する.

(2) Hilbert-Kunz 重複度と特異点の性質との関連を調べる.

(3) Almost Gorenstein 環の構造を特に数値的半群環に対して調べる.

3. 研究の方法

数学の研究で, 最も有効な手段は同じ目的意識を持つ研究者との情報交換, 共同研究である. そのために国内, 海外の旅費が使用された. また, 研究代表者が主催する「特異点論セミナー」が毎月日本大学文理学部で行われ, 全国から特異点論, 可換環論に関する研究者たちが集まっている. このセミナーも大変研究上有益であった.

研究資料を検索することも当然必要で, そのために図書予算を使用した. また, 論文作成, 研究連絡のために, 計算機を使用するので. そのための研究費も支出した.

4. 研究成果

(1) Cohen-Macaulay 局所環の Ulrich ideal の概念の研究を 後藤四郎 明治大学教授, 大関一秀 山口大学 准教授, 高橋 亮 名古屋大学准教授, 吉田健一教授と進め, 特に 2 次元有理特異点の Ulrich ideal の分類を行った.

(2) 埋め込み次元を固定した時の, 有理特異点, F 有理特異点, F 純特異点の重複度の上限を Kansas 大学 (当時) の Huneke 教授との共同研究で記述した.

(3) J. Lipman の 1969 年の 2 次元有理特異点に関する論文は, 2 次元有理特異点の理論のバイブルとなったが, 一方で, 有理特異点でない 2 次元の特異点に対するイデアル論は, 全く進展がなく, 研究対象にもされていなかった. 研究代表者は山形大の奥間智弘 教授, 研究分担者の吉田健一教授と共に, 2 次元正規特異点 (A, m) の特異点解消の空間 X 上のサイクル Z で A の整閉イデアル $I_Z = H^0(X, \mathcal{O}_X(-Z))$ を表すとき, $H^1(X, \mathcal{O}_X(-Z))$ の次元が常に A の幾何的種数 $p_g(A)$ 以下であることを示し, この次元が

$p_g(A)$ に等しいとき, Lipman の理論がそのまま適用可能であることを示した. このような「 p_g イデアルの」の概念により, 2001 年に Goto-Iai-Watanabe によって定義されたが, 10 年以上 目立った動きのなかった “good ideal” の存在を示した. また, p_g イデアルの特徴付けを Rees 環によって与え, イデアルの core の性質によって有理特異点の特徴付けされることを示した. 「 p_g イデアルの」の概念の確立は本研究の大きな成果と言える.

(4) 一般化された Hilbert-Kunz 重複度の研究を Kansas 大学の H. Dao 教授との共同研究により行い, F -正則環の性質など, いくつかの応用を得た.

(5) almost Gorenstein 数値的半群環の研究を Essen 大学の J. Herzog 教授との共同研究で行い, 4 つの元で生成された almost Gorenstein 数値的半群環の特徴付けや, いくつかの今まで難解であった証明の簡易化に成功した.

(6) 代数閉体上の 2 次元正規次数付き環に斉次な素元が存在するための条件を与えた. (Utah 大学 A. Singh 教授, 名古屋大学高橋亮准教授との共同研究)

(7) 局所環 (A, \mathfrak{m}) に於いて, \mathfrak{m} 準素イデアルに対して strong Rees property のを導入し, 極大イデアルの冪がその性質を持つための条件を与えた. (IIT Bombay の T. Puthenpurakal 教授, 吉田健一教授との共同研究)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

- 1 T. Okuma, K. Watanabe, K. Yoshida, A characterization of two-dimensional rational singularities via Core of ideals, J. of Algebra, 査読あり, vol. 499 (2018), 450-468.
- 2 S. Takagi and K. Watanabe, F -singularities --- applications of characteristic p methods to singularity theory, Amer. Math. Soc., SUGAKU Translations, 査読あり, vol. 31 (2018), 1-42.
- 3 J. Herzog and K. Watanabe, Almost symmetric numerical semigroups and almost Gorenstein semigroup rings generated by 4 elements, RIMS Kokyuroku, Kyoto University, 査読なし, vol. 2051 (2017), 120-132.
- 4 T. Okuma, K. watanabe, K. Yoshida,

Rees algebras and p_g -ideals in a two-dimensional normal local domain, Proc. Amer. Math. Soc, 査読あり, vol 145 (2017), 39--47.

5 H. Dao and K. Watanabe, Some computations of generalized Hilbert-Kunz function and multiplicity, Proc. Amer. Math. Soc., 査読あり, vol. 144 (2016), 3199-3206.,

6 T. Okuma, K. Watanabe, K. Yoshida. Good ideals and pg -ideals in two-dimensional normal singularities, Manuscripta Math. 査読あり, Vol. 150 (2016), 499 -- 520.

7 S. Goto, K. Ozeki, Ryo Takahashi K. Watanabe K. Yoshida, Ulrich ideals and modules over two-dimensional rational singularities, Nagoya Math. J., 査読あり, vol. 221 (2016), 69-110,

8 C. Huneke, K. Watanabe, Upper bound of multiplicity of F -rational rings and F -pure rings, Proc. Amer. Math. Soc, 査読あり, vol 142 (2015) 5021-5026

9 K. Watanabe, Classification of 2-dimensional normal graded hypersurfaces with $a(R) \leq 6$, Bull. Brazilian Math. Soc. 査読あり, New series {bf 45}, (2014) 887-920.

10 S. Goto, K. Ozeki, Ryo Takahashi K. Watanabe K. Yoshida, Ulrich ideals and modules, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 査読あり, vol. 156 (2014), 137--166.

[学会発表](計 22 件)

- 1 K. Watanabe, Hilbert-Kunz multiplicities and related topics, Algebra Seminar, Hue University, Vietnam, Mar 26, 2018.
- 2 K. Watanabe, Ideal theory of 2 dimensional normal rings via resolution of singularities, Algebra Seminar, VIASM (Vietnam Institute for Advanced Studies in Mathematics). Mar 22, 2018.
- 3 K. Watanabe, Homogeneous prime elements of 2-dimensional normal graded rings, 第 39 回可換環論シンポジウム RIMS, 京都大学, Nov 16, 2017.
- 4 T. Okuma, K. Watanabe, K. Yoshida, Normal and core reduction numbers of integrally closed ideals, 第 39 回可換環論シンポジウム, RIMS, 京都大学, Nov 16, 2017.

⁵ 渡辺 敬一, Almost Symmetric Numerical Semigroups, 言語、論理、代数系と計算機科学の展開」研究集会, RIMS, 京都大学, Feb 22, 2017.

⁶ 奥間智宏, 渡辺 敬一, 吉田 健一, Geometric genus of cone singularities 可換環論シンポジウム IPC 生産性国際交流センター, 葉山国際村, Nov 21, 2016

⁷ K. Watanabe, Some variants of Hilbert-Kunz multiplicity, 第15回岡山可換代数表現セミナー, Nov. 14, 2016

⁸ K. Watanabe, Core of p_g -ideals in 2-dimensional normal singularities and a characterization of rational singularities via Core of ideals, Math Department Colloquium, Tata Institute of Fundamental Researches, Mumbai, India, Nov 3, 2016.

⁹ K. Watanabe, Ideal theory of 2-dimensional normal local rings using resolution of singularities and a new characterization of rational singularities via core of ideals, Algebra Seminar. IIT Bombay, Nov 2, 2016.

¹⁰ K. Watanabe, Characterization of 2-dimensional rational singularities via core of ideals. COMMUTATIVE ALGEBRA AND ITS INTERACTIONS WITH ALGEBRAIC GEOMETRY: TIGHT CLOSURE, LINKAGE, AND SYZGIES A conference honoring Craig Huneke on the occasion of his 65th birthday. July 10, 2016.

¹¹ K. Watanabe, An invariant of integrally closed ideals in 2-dimensional normal singularities and a characterization of rational singularities via Core of ideals, International Conference and the 8-th Japan-Vietnam joint Seminar on Commutative Algebra, Ha Long, Vietnam, Mar 22, 2016.

¹² 渡辺敬一, Almost Symmetric Numerical Semigroups, 研究集会「代数系、論理、言語と計算機科学」京都大学数理解析研究所 (招待講演), Feb 16, 2016.

¹³ K. Watanabe, A classification of integrally closed ideals in 2-dimensional normal singularities and a characterization of rational singularities via Core of ideals, The 3rd Franco-Japanese-Vietnamese symposium on singularities, Hanoi, Dec 2, 2015.

¹⁴ T. Okuma, K. Watanabe and K. Yoshida, A characterization of 2-dimensional rational singularities via Core of ideals, 第37回可換環論シンポジウム (倉敷シーサイドホテル), Nov 21, 2015

¹⁵ K. Watanabe, F-thresholds, Workshop on Multiplier Ideals, Test Ideals and Bernstein-Sato Polynomials, Univ.

Politecnica de Catalunya, Barcelona, Sept 8, 2015.

¹⁶ K. Watanabe, p_g -ideals and core of integrally closed ideals in normal surface singularities, AMS Summer Institute, Univ. of Utah, July 14, 2015.

¹⁷ K. Watanabe, Integrally Closed Ideals of 2-dimensional normal singularities, 第13回アフィン代数幾何研究集会, 関西学院大学梅田キャンパス, Mar 8, 2015.

¹⁸ 奥間智宏, 吉田 健一, 渡辺 敬一; Integrally Closed Ideals of 2-dimensional normal singularities; 第36回可換環論シンポジウム; 葉山国際村; Nov 14, 2014.

¹⁹ K. Watanabe, Towards the theory of integrally closed ideals of 2-dimensional normal singularities, 可換環と表現論研究集会、岡山大学, Oct 13, 2014.

²⁰ K. Watanabe, Ulrich Ideals, International Meeting on numerical semigroups, Cortona, Italy, September 09, 2014.

²¹ K. Watanabe, Ideal Theory of Integrally Closed Ideals of 2-dimensional normal singularities, OSCAR 2, 岡山大学, June 9, 2014.

²² K. Watanabe, Introduction to Commutative Algebra of Singularities, Colloquium, KAIST, Dejong, Korea; May 1, 2014.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡辺 敬一 (WATANABE Kei-ichi)
日本大学・文理学部・上席研究員
研究者番号: 10087083

(2) 研究分担者

吉田 健一 (YOSHIDA Ken-ichi)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号: 89240802