

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400056

研究課題名(和文) 次数付超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群に関する研究

研究課題名(英文) Studies of maximal Cohen-Macaulay modules over graded hypersurfaces

研究代表者

荒谷 督司 (Araya, Tokuji)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：70613222

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、次数付き超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群について研究を行った。ゴレンシュタイン環上の極大コーエン・マコーレー加群のなす安定圏は三角圏の構造を持つことが知られている。超曲面はゴレンシュタイン環の典型例であり、さらに次数付き有限表現型の場合、その三角圏としての構造は大変きれいなものであることが知られている。

本研究における最大の結果は、A型およびD型の有限表現型であるような次数付き超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群のなす安定圏におけるシック部分圏を完全に分類したことである。この結果は8月にアメリカ合衆国シラキュース大学で開催された研究集会で発表した。

研究成果の概要(英文)：The aim this research is to study the category of maximal Cohen-Macaulay modules over graded hypersurfaces. It is well-known that the stable category of maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings has a structure of triangulated category and that hypersurface is a typical example of Gorenstein.

The main result of this research is to give a classification of the thick subcategories of the stable category over the simple hypersurface singularity of type A and D. I gave a talk about this result at the international conference which held at Syracuse university.

研究分野：可換環論

キーワード：超曲面 極大コーエン・マコーレー加群

## 1. 研究開始当初の背景

ゴーレンシュタイン環上の極大コーエン・マコーレー加群のなす圏はフロベニウス圏であり、その安定圏は三角圏の構造を持つことが知られている。特に、そのゴーレンシュタイン環が孤立特異点を持つとき、極大コーエン・マコーレー加群のなす安定圏のアウスランダー・ライテン箆が存在することが知られている。アウスランダー・ライテン箆とは、直既約な極大コーエン・マコーレー加群の同型類を頂点とし、それらの間の既約射を矢印として表した有向グラフであることから、その圏構造を知るための大変有用な道具である。

超曲面はゴーレンシュタイン環の典型例であり、有限表現型であれば孤立特異点を持つので、その極大コーエン・マコーレー加群のなす安定圏にアウスランダー・ライテン箆が存在する。さらに次数付きの場合、そのアウスランダー・ライテン箆はディンキン型の有向グラフを  $Z$ -拡大したものになっていることが知られている。

一方で、一般の三角圏に対し、その圏の部分圏を分類する研究も広く行われている。特に近年ではシック部分圏を分類する研究が盛んにおこなわれている。

超曲面はゴーレンシュタイン環であることから、ゴーレンシュタイン環上の極大コーエン・マコーレー加群を知ることは、超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群を知ることにつながる。そして、基礎環がゴーレンシュタインであるとき、与えられた加群が極大コーエン・マコーレーであるための必要十分条件は、その加群が全反射的であることは広く知られた事実である。この観点から、与えられた加群がいつ全反射的であるのかを知ることが、この研究を行う上で重要な役割を果たす。

## 2. 研究の目的

申請者は可換環論の表現論に関心があり、コーエン・マコーレー環上の極大コーエン・マコーレー加群のなす圏について研究を行っている。超曲面はコーエン・マコーレー環（ゴーレンシュタイン環）の一種であり、正則局所環を単項生成イデアルで割った環であることから、様々な良いホモロジカルな性質を持っている。本研究では、次数付き超曲面上の次数付き極大コーエン・マコーレー加群が持つ性質およびそれらがなす圏について研究を行う。

## 3. 研究の方法

次数付き超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群の持つ性質について、次数のつけ方

より、それらが持つ性質がどのように変化をするのかについて研究を行う。

そのために、まず次数付きでない場合の既存の結果や超曲面上特有の理論について理解を深めることから始める。それと並行して多くの例を計算し、その結果を分析する。

また、吉野雄二氏（岡山大学）をはじめ、多くの研究者と議論する場を設け、様々な助言をいただきながら研究を行う。

## 4. 研究成果

本研究における最大の結果は、 $A$  型および  $D$  型の有限表現型であるような次数付き超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群のなす安定圏におけるシック部分圏を完全に分類したことである。すでに知られた結果として、 $C. Ingalls-H. Thomas$  の分類の結果が知られているが、本研究ではより具体的な分類を与えた。

基礎環が  $A_n$  型の有限表現型であるような次数付き超曲面のとき、直既約極大コーエン・マコーレー加群全体の集合に有限回シフトを取れば同型になるという同値関係を入れた同値類全体の集合を  $M$  とする。円周を  $n+1$  等分し、それぞれの点に反時計回りに  $0, 1, \dots, n$  と番号を付け、それらを結んでできる弦全体の集合を  $C$  とする。このとき、 $M$  から  $C$  へ全単射写像があることがわかる。

$C$  への像をグラフとして見たときに、各連結成分が完全グラフになっていることと、その逆像の同値類に属する直既約極大コーエン・マコーレー加群全体の加法的閉包がシック部分圏であることが必要十分条件であることが分かった。

これを用いることにより、任意の極大コーエン・マコーレー加群に対しそれを含む最小のシック部分圏を容易に見つけ出すことができる。

基礎環が  $D$  型の場合、対応する図形は  $A$  型の場合に比べて複雑になるが、同様の結果を得ることができた。例外型の場合はまだわかっていないので、今後の課題としたい。

この結果は8月にアメリカ合衆国ニューヨーク州シラキュースで開催された研究集会 Workshop and International Conference on Representations of Algebras (ICRA 2016) で発表した。

呉工業高等専門学校の影山優氏との共同研究では、有限表現型であるような次数付き超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群のなす安定圏における反射的部分圏の分類を与えた。この結果は *Communications in Algebra* に掲載された。

背景でも述べたように、与えられた加群がいつ全反射的であるのかを知ることが、この研究を行う上で重要な役割を果たしている。

奈良工業高等専門学校の飯間氏との共同研究では、与えられた加群がいつ全反射的であるのかについて研究を行った。R を可換ネーター局所環とし、R に対し次の条件を考える。

(\*)  $\text{Ext}^i(X, R) = 0$  ( $i$  はすべての正の整数) をみたく任意の有限生成 R-加群に対し、不等式  $\text{depth } X_p \geq \min\{\text{depth } R_p, 1\}$  ( $p$  は任意の素イデアル) をみたく。

このとき、次のような結果を示した。

R を極小素イデアルで局所化した環がゴレンシュタインであるようなコーエン・マコーレー環とし、(\*) をみたくとする。M を有限生成 R-加群とする。もし  $\text{Ext}^i(M, R) = 0$  ( $i$  はすべての正の整数) ならば M は全反射的である。

この結果を用いると、極小素イデアルで局所化した環がゴレンシュタインであるようなコーエン・マコーレー環で、(\*) をみたくすものに対し、太刀川予想が成立していることを導くことができる。この結果は Communications in Algebra に掲載されることが決定している。

極小素イデアルで局所化した環がゴレンシュタインであるという仮定は一見強い仮定に見えるが、整域では成立する仮定なのでそれほど強い仮定ではない。また、条件(\*) に関して、全反射的加群の depth は常に基礎環の depth に等しいので、(\*) は今回得られた結果が成立するための必要条件であることに注意しておく。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

著者名/論文標題/雑誌名/査読の有無/巻/発行年(西暦)/ページ/DOI

Tokuji Araya, Kei-ichiro Iima / Remarks on torsionfreeness and its applications. / Comm. Algebra / 査読有 / 掲載決定 / <http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2017.1324865>

Tokuji Araya, Masaru Kageyama / Remarks on reflexive subcategories. / Comm. Algebra / 査読有 / 44 no. 7 / 2016 / 3038 - 3052 / <http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2015.1065868>

Takuma Aihara, Tokuji Araya, Osamu Iyama, Ryo Takahashi, Michio Yoshiwaki / Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories / J. Algebra / 査読有 / 399 / 2014 / 205-219 / <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.09.035>.

[学会発表](計9件)

発表者名/発表標題/学会等名/発表年月日/発表場所

Tokuji Araya / Thick subcategories over graded simple hypersurface singularities / Workshop and International Conference on Representations of Algebras (ICRA 2016) / 2016年8月16日 / Syracuse University (アメリカ)

Tokuji Araya / Thick subcategories over graded simple singularities of type A / Workshop on Weighted Projective Spaces and Representation Theory / 2016年3月8日 / 合肥(中国)

荒谷 督司 / Thick subcategories over graded simple singularities of type D / Ring Theory and Representation Theory Seminar / 2016年1月18日 / 名古屋大学(愛知県名古屋市)

荒谷 督司 / Remarks on some homological conjectures / 第37回可換環論シンポジウム / 2015年11月19日 / 倉敷シーサイドホテル(岡山県倉敷市)

飯間 圭一郎, 荒谷 督司 / On the locally Gorensteinness and Serre's (Sn)-condition of modules / 2015年度日本数学会年会 / 2015年3月21日 / 明治大学駿河台キャンパス(東京都千代田区)

Tokuji Araya / Locally-Gorensteinness of Cohen-Macaulay rings / 第27回可換環論セミナー / 2015年1月28日 / 静岡大学(静岡県静岡市)

荒谷 督司 / Locally-Gorensteinness of Cohen-Macaulay rings / 第36回可換環論シンポジウム / 2014年11月24日 / 生産性国際交流センター(神奈川県三浦市)

荒谷 督司 / Gorensteinness on the punctured spectrum / 第45回環論および表現論シンポジウム / 2014年9月14日

日 / 大阪市立大学 (大阪府大阪市)

Tokuji Araya / Gorensteinness on the punctured spectrum / The 16th International Conference on Representations of Algebras and Workshop / 2014年8月26日 / 三亜市 (中国)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

荒谷 督司 (ARAYA, Tokuji)  
岡山理科大学・理学部・准教授  
研究者番号: 70613222

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

##### (3) 連携研究者

吉野 雄二 (YOSHINO Yuji)  
岡山大学・理学部・教授  
研究者番号: 00135302

##### (4) 研究協力者

( )