

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：55501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400057

研究課題名(和文)射影多様体のガロワ点理論の展開と応用

研究課題名(英文)Development and application of Galois point theory of projective varieties

研究代表者

三浦 敬(MIURA, Kei)

宇部工業高等専門学校・一般科・教授

研究者番号：50353321

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：(1)群のリース積を用いることで、ある種の非ガロワ点でのガロワ群の評価に成功した(大淵氏との共同研究)。(2)三角関数の3乗で定義されるアステロイドを念頭にリサーチ曲線の拡張版を定義し、点射影を用いて関数体の対拡大を考察した。(3)準ガロワ点の概念を導入した(深澤氏、高橋氏との共同研究)。(4)位数が大きな自己同型群を持つ平面曲線について検討を行った。特に、位数が平面曲線の次数の60倍となる場合について議論を行った(春井氏、大淵氏との共同研究)。(5)ガロワ点がひき起こす双有理変換について、クレモナ変換群の研究との融合を試みた。

研究成果の概要(英文)：(1)By using the wreath product of group, we succeeded in evaluating the Galois group at a certain non-Galois point (joint work with A. Ohbuchi). (2)We defined an extended version of the Lissajous curve, and studied the structure of the extension of the function field by using the point projection. (3)We introduced the concept of quasi-Galois points (joint work with S. Fukasawa and T. Takahashi). (4)We studied curves with large automorphism group. In particular, we discussed the case where the order is 60d. (joint work with T. Harui and A. Ohbuchi). (5) We tried to integrate the birational transformation belonging to the Galois point with the study of the Cremona group.

研究分野：代数幾何

キーワード：ガロワ点 準ガロワ点 射影代数多様体 代数曲線 自己同型群

1. 研究開始当初の背景

1996年ごろ、吉原久夫氏(新潟大)は代数関数体の体拡大の構造を詳細に調べるために「ガロワ点」という概念を導入した。射影平面内の平面曲線Cに対し、平面内の点Pからの点射影が、有理関数体のガロワ拡大をひき起こすときに(すなわち、点射影がガロワ被覆となると)、点Pをガロワ点と呼ぶ。当初、ガロワ点是非特異平面代数曲線に対して定義された。研究成果として、ガロワ点の個数の決定、ガロワ群の決定、ガロワ閉包曲線の種数の決定、ガロワ点による曲線の特徴づけなどがなされていた。この場合、研究が文字通りスムーズになされた要因のひとつとして、非特異平面曲線の自己同型が非常に分かりやすいことが挙げられる。特に、ガロワ点でのガロワ群の作用は線形変換、すなわち行列を用いて表すことができる。これは平面曲線の解析に絶大なる威力を発揮した。その後、筆者は、ガロワ点の概念を、特異点を持つ平面曲線にまで拡張し、曲線の次数が低い場合を中心にガロワ点の個数の決定等を行った。しかしながら、もはやガロワ点でのガロワ群の作用は線形変換とはならず、さらなる研究推進のためには、新たなアプローチの構築が急務であった。代数曲線のガロワ点の研究とは、ガロワ群の作用を通じて、代数曲線の自己同型群を研究することと同値である。どのような群がガロワ点でのガロワ群として現れるか、また、そのガロワ群と自己同型群がどのような関係にあるのかを明らかにしておく必要があった。

2. 研究の目的

以上の背景を踏まえて、本研究においては、特異点を持つ射影代数多様体に対してガロワ点理論を展開できるように、新たな枠組みの構築を試みた。また、応用としてガロワ点の自己同型群への寄与を精査することで、射影多様体の全自己同型群の決定を試みた。具体的には

- (A) グレブナー基底を活用して枠組みとなる理論の構築
- (B) 群の表現論からのアプローチ
- (C) 自己同型群の決定
- (D) 分かりやすい曲面上で考察
- (E) 特異点を持つ代数曲線に対するガロワ点を探す
- (F) 研究集会の開催

を行うこととした。

3. 研究の方法

(A) さまざまな有限群の関数体への作用を考え、その不変体の生成元を計算する。ケンパーによる手法を活用し、グレブナー基底を求めることで生成元を得ることができる。不変体が記述できれば対応するガロワ被覆が得られる。さまざまな有限群の部分群の系列に対してこれらの計算を実行する。

- (B) 群の線形表現を考える。ある決まっ

た次元の線形部分空間からの射影が、関数体のガロワ拡大をひき起こすとき、それをガロワ部分空間と呼ぶことにする。この場合、このガロワ部分空間は、ガロワ群の作用を表現する行列の不変部分空間のようなものであることが推測される。この点を明らかにし、定式化を行う。

(C) ガロワ点が存在すれば自明でない自己同型が存在する。すなわち、ガロワ点は自己同型群に貢献しているといえる。この視点から、代数曲線の自己同型群は、ガロワ点でのガロワ群と射影直線の自己同型群の有限部分群の半直積になることを予想している。このことを用いて、一般の代数曲線の自己同型群を決定する。また、5次交代群を自己同型群に含む平面代数曲線の構成に、ガロワ点があることが分かりつつあるので詳細を議論する。

(D) ガロワ点を3次曲面や線織面上で考えることを提案する。さらに、シュライアーによる理論を応用する。すなわち、標準曲線を有理スクロール上で考え、その上の線形系を解析する。まずは、トリゴナル曲線から議論を開始し、得られた結果を平面曲線に還元し、ガロワ点理論へ応用する。

(E) ガロワ点と特異点の関係を記述するとくに、曲線がガロワ点を持つときの、特異点の性質を考察する。たとえば、特異点の個数や不変量からガロワ点の個数を導く公式を構成する。また、平面曲線の特異性を、別の扱いやすい形で表示できる双対曲線について、ガロワ点の考察を行う。

(F) 本研究課題の発展のために、研究集会「Workshop on Galois point and related topics」「代数幾何学研究集会-宇部-」を開催する。

4. 研究成果

連携研究者らと議論を行い、以下の研究成果を得た。

- (1) 代数曲線の自己同型群の決定について、大淵朗氏(徳島大)との共同研究で、群のリース積の概念を用いることで、ある種の非ガロワ点でのガロワ群の評価に成功した。これを用いることで、ガロワ閉包曲線の自己同型群の研究に応用が可能となった。

- (2) リサーチ曲線の拡張。三角関数の3乗で定義されるアステロイドを念頭に、リサーチ曲線の拡張版を新たに定義し、点射影を用いることで関数体の体拡大の様子を考察した。この場合も、群のリース積が大きな役割を果たし、ガロワ群の評価を行うことに成功した。これらの曲線はたくさんの特異点を持つが、特異点の現れる場所、

個数等が扱いやすいのが利点である。特異点を持つ代数曲線のガロワ点理論の展開へ役立つものとなった。

- (3) 準ガロワ点の導入。深澤知氏(山形大), 高橋剛氏(新潟大)との共同研究で, ガロワ点の概念を拡張させた「準ガロワ点」を定義し, 一般的な性質を調べた。準ガロワ点はガロワ点には無い柔軟性を持っており, ガロワ点理論では調べることができなかった, クライン曲線やウィーマン曲線の特徴づけに成功した。このことについては, 2017年9月にイタリア共和国のパヴィア大学で開催されたワークショップで講演を行った。
- (4) 位数の大きな自己同型群を持つ平面曲線について。春井岳氏(高知工科大), 大淵氏との共同研究で, 自己同型群が5次交代群の拡大となる場合, すなわち自己同型群の位数が平面曲線の次数の60倍となる場合について, 3種類の典型例を考察し, 自己同型群の構造を完全に解明した。
- (5) ガロワ点がひき起こす双有理変換について。ガロワ点が存在すれば, ガロワ群の作用により双有理変換がひき起こされる。この双有理変換をガロワ点に付随する双有理変換と呼ぶ。この双有理変換とクレモナ変換群の研究の融合を試みた。重複度3の尖点を持つ平面4次曲線は, 射影同値を法として2種類存在することが知られている。片方はガロワ点を1個持ち, 他方は2個持つことを筆者が以前に証明している。この場合, これらのガロワ点に付随する双有理変換の性質を解明した。それらは, いわゆるジョンキェール変換であり, さらにクレモナ群の中で射影変換と共役であることを証明した。このことについては, 2018年3月に関西学院大学で開催された研究会で講演を行った。
- (6) 研究集会の開催について。筆者と深澤氏, 高橋氏が世話人となり, 「Workshop on Galois point and related topics」を2014年9月に滋賀大学大津サテライトプラザ(長谷川武博氏(滋賀大)の協力のもと), 2015年9月に神奈川大学横浜キャンパス(本間正明氏(神奈川大)の協力のもと), 2016年5

月に新潟大学で開催した。筆者と北川真也氏(岐阜工業高等専門学校), 林田秀一氏(上越教育大), 高橋氏が世話人となり「代数小研究集会 in 新潟」を2015年6月に新潟大学で開催した。また, 筆者と春井氏, 高橋氏が世話人となり, 「代数曲線・曲面とその周辺」を2016年11月に大阪大学で開催した。さらに, 筆者と石田弘隆氏, 白根竹人氏(いずれも宇部工業高等専門学校)が世話人となり, 2015年, 2016年, 2017年の1月に「代数幾何学研究集会-宇部-」を宇部高専にて開催した。これらの集会の開催に際し, 本研究課題の補助を利用した。いずれに集会においてもガロワ点とその周辺に関する活発な議論が行われ, 筆者の研究推進に大きく役立つものとなった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

Satoru Fukasawa, Kei Miura and Takeshi Takahashi, Quasi-Galois points, I: Automorphism group of plane curves, Tohoku Mathematical Journal, 査読あり
掲載決定

Takeshi Harui, Kei Miura and Akira Ohbuchi, Automorphism group of plane curve computed by Galois points, II, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, volume 94, pp. 59-63, 2018年, 査読あり
DOI:10.3792/pjaa.94.59

Satoru Fukasawa and Kei Miura, Galois points for a plane curve and its dual curves, II, Journal of Pure and Applied Algebra, volume 220, pp. 2038-2048, 2016年, 査読あり
DOI:10.1016/j.jpaa.2015.10.015

Kei Miura and Akira Ohbuchi, Automorphism group of plane curve computed by Galois points, Beitrage zur Algebra und Geometrie, volume 56, pp. 695-702, 2015年, 査読あり
DOI:10.1007/s13366-013-0181-3

[学会発表](計10件)

Kei Miura, Birational transformations belonging to Galois points, 第16回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2018年3月8日

Kei Miura , Quasi-Galois points ,
Workshop Geometric Galois theory and
monodromy , パヴィア大学 , 2017 年 9 月
26 日

三浦 敬 , ガロワ点に付随する双有理変
換について , II , Workshop on Galois
point and related topics , KKR 蔵王白
銀荘 , 2017 年 7 月 16 日

三浦 敬 , 双対曲線のガロワ点について ,
射影多様体の幾何とその周辺 2016 , 高知
工科大学永国寺キャンパス , 2016 年 10
月 8 日

三浦 敬 , 準ガロワ点について , 第 13 回
代数曲線論シンポジウム , 神奈川工科大
学アクティブ・ラーニング横浜

三浦 敬 , 準ガロワ点と応用 , Workshop
on Galois point and related topics ,
神奈川大学横浜キャンパス , 2015 年 9 月
6 日

三浦 敬 , 代数曲線のガロワ点と自己同
型群について , 代数小研究集会 in 新潟 ,
新潟大学 , 2015 年 6 月 6 日

三浦 敬 , Galois points for Lissajous
curves (revisited) , 代数幾何シンポジ
ウム 2014 in 岐阜 , ソフトピアジャパン
センタービル , 2015 年 1 月 11 日

三浦 敬 , 非ガロワ点でのガロワ群につ
いて , 第 12 回代数曲線論シンポジウム ,
日本大学理工学部駿河台校舎 , 2014 年 12
月 21 日

三浦 敬 , On Galois group at non-Galois
point , Workshop on Galois point and
related topics , 滋賀大学大津サテライト
プラザ , 2014 年 9 月 15 日

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.ube-k.ac.jp/kmiura/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三浦 敬 (MIURA, Kei)

宇部工業高等専門学校・一般科・教授

研究者番号 : 50353321

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

吉原 久夫 (YOSHIHARA, Hisao)

新潟大学・自然科学系・名誉教授

研究者番号 : 60114807

大淵 朗 (OHBUCHI, Akira)

徳島大学・理工学部・教授

研究者番号 : 10211111

徳永 浩雄 (TOKUNAGA, Hiro-o)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号 : 30211395

高橋 剛 (TAKAHASHI, Takeshi)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号 : 60390431

(4) 研究協力者

なし