

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成30年 5月30日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400061

研究課題名(和文) 新しい視点からのリーマン面の研究およびその応用

研究課題名(英文) Study of Riemannian surfaces from novel point of view

研究代表者

西納 武男 (NISHINOU, Takeo)

立教大学・理学部・准教授

研究者番号：50420394

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：トロピカル幾何における考え方を敷衍して、種々の多様体上で正則曲線の構成を主に行った。この構成は変形の障害がある場合の変形理論に基づいており、従来のトロピカル幾何における議論では扱う事ができない。この点を克服するために、退化した状況において曲線の変形の障害を表すコホモロジー群を計算し、実際の障害がどこから生じるかを明らかにした。その結果多くの場合に障害の具体的な計算が可能になり、従来知られていない状況で正則曲線を構成、分類する事ができた。それに基づいて、複素トーラスにおける正則曲線と周期的なトロピカル曲線の対応の証明や、K3曲面上で非常に多くの有理曲線の構成を行う事ができた。

研究成果の概要(英文)：Our main work concerns construction of holomorphic curves on various types of varieties, amplifying ideas from tropical geometry. Most of the construction is based on a newly developed theory of deformations which allows us to deal with those cases which are beyond the reach of existing methods of tropical geometry. To overcome this point, we calculated the cohomology groups to which obstructions to deform degenerate curves belong, and also revealed what causes actual obstructions. As a result, we are now able to explicitly calculate obstructions in variety of cases, and then construct and classify holomorphic curves. As applications, we gave a precise relationship between periodic plane tropical curves and holomorphic curves on complex two dimensional tori, and also constructed vast number of rational curves on K3 surfaces.

研究分野：幾何学

キーワード：複素多様体 シンプレクティック多様体

1. 研究開始当初の背景

(1)ミラー対称性の研究はその発見以来様々な視点を取り込みつつ発展しており、巨大な分野を形成している。ミラー対称性は元来素粒子物理学における弦理論を出自としており、弦理論においては古典物理学における粒子の軌道(1次元の曲線)に対応するものが2次元の曲面になるため、曲面の幾何学が基本的な役割を果たすことになる。特にリーマン面は運動方程式の古典解として現れることから重要である。

(2)しかし多様体の中のリーマン面を直接調べることは多くの場合困難であり、何らかの手段を用いることが必要となる。そのような手法の中で比較的新しくかつ有効な方法として、多様体の退化とトロピカル幾何学を用いた研究がある。この手法は正則曲線の研究に組み合わせ論的な観点を持ち込むとともに、ミラー対称性の定式化そのものにも影響を与えており、さらなる進展が期待されていた。

2. 研究の目的

(1)この研究では、ミラー対称性に見られるような、幾何学的対象に隠されている対称性について明らかにすることが目的である。ミラー対称性は複素幾何学とシンプレクティック幾何学の間に対称性についての主張であるが、その他にもリーマン面とグラフとの間の関係や、リーマン面上のベクトル束と可積分系の関係など、一見明らかでないところに数学的に重要な対象が隠されていることがあり、そのような対象を発見及び研究していくことも目的とする。

(2)それとともに、ミラー対称性の発見を契機の一つとして発展したトロピカル幾何学のような新しい手法を古典的な幾何学の問題に適用して、従前の問題に対しても新しい見地を見出していくことも目的とする。

3. 研究の方法

本研究は古典的な代数幾何に対する問題意識と、現在急速に進んでいるミラー対称性に関わる幾何学やその周辺分野に対する問題意識の両方を含むものである。従って、研究を進めるにあたっては古典的な文献に当たるとともに最新の発展を含む文献に触れる必要がある。また、トロピカル幾何学の研究者は国内にはわずかであり、ミラー対称性の研究者も海外に多いので、積極的に海外の研究集会に参加して交流し、情報を収集することや、必要に応じて共同で研究を行うことが研究上重要となる。

4. 研究成果

(1)双対グラフと退化リーマン面の変形代数曲線の研究においてグラフが用いられることはしばしばある。通常、グラフは代数

曲線の退化における中心ファイバーの双対グラフとして現れる。任意の有限グラフはこのようにして得られるのであるが、代数多様体に埋め込まれた代数曲線と、対応してアフィン空間に埋め込まれたグラフを考える時は状況はもっと複雑になる。特に、すべてのグラフが代数曲線に対応するわけではなく、代数曲線の変形理論とグラフの関係を調べる必要が生じる。トロピカル幾何学においては以上のような代数曲線の退化と対応するグラフを考えるのが基本的なアイデアであるが、対応が良くわかっているのは主に平面曲線や種数0の場合で、これらの場合には例外的にすべてのグラフが代数曲線に対応する。本研究ではこれらにクラスでない一般の場合について調べ、特に高次の頂点を持つグラフの重要性を明らかにした。従来のトロピカル幾何学と代数曲線の間を与える典型的な手順は(i)トロピカル曲線に対応する退化した代数曲線を構成する(ii)そうして作った曲線を変形する、というものであるが、高次の頂点はこれらのどちらに対しても重大な影響を与えることを観察し、詳しく解析した。具体的な結果は以下の通りである。(A)3次元以上で種数が1以上の曲線の場合、トロピカル曲線に対応する退化した代数曲線が存在しない場合があることを明らかにした。(B)種数1の場合、退化した代数曲線が存在するための必要十分条件と、その場合にいくつ存在するかを明らかにした。(C)高次の頂点に対応する代数曲線の変形に与える影響を調べ、種数1の場合には変形が存在するための必要十分条件を与えた。

(2)周期的平面トロピカル曲線と2次元複素トーラス上の正則曲線の対応

パリ11大学のTony Yu氏との共同研究で以下の結果を得た。G.Mikhalkinの研究(Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2 . J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 2, 313-377)により、平面上のトロピカル曲線とトーリック曲面上の正則曲線の対応が与えられた。平面の錐への分割からトーリック曲面及びその退化が得られるように、平面の周期的な多面体分割から2次元複素トーラス及びその退化が得られることを考えると、この研究を平面上の周期的なトロピカル曲線と2次元複素トーラス上の正則曲線の対応に拡張するのは自然な発想である。しかし変形理論における障害の困難により、長らく実現されなかった。この研究ではこの問題を解決した。結果として得られるものは通常Gromov-Witten不変量に類似した正則曲線の数え上げ不変量であるが、より精密な複素構造(正確には複素構造の退化族)を反映した不変量になっている。具体的な結果は以下の通りである。(A)周期的なトロピカル曲線の場合は、平面曲線であっても対応する退化した代数曲線が存在しないことがあることを明らかにした上で、このような代数曲線が存

在するための必要十分条件を与えた。(B)退化した代数曲線が存在する場合に、固定したトロピカル曲線に対していくつの代数曲線が存在するかをコホモロジーを用いて記述した。(C)組み合わせ的な議論により変形の障害を具体的に計算する手法を開発し、退化したトーラス上の退化した正則曲線が変形できるための必要十分条件を与えた。

(3)K3 曲面上の正則曲線の構成

K3 曲面上の正則曲線に関するよく知られた予想として、任意の射影的 K3 曲面は可算無限個の有理曲線を持つというものがある。これまでに知られている結果として、S.Mori and S.Mukai, The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11. Lecture Notes in Math. vol. 1016, 334-353. Springer, Berlin, 1983.により任意の射影的 K3 曲面は少なくとも 1 つ有理曲線を持つことが示され、X.Chen, Rational curves on K3 surfaces. J. Algebraic Geom., 8(2) (1999), 245-278.により generic な射影的 K3 曲面は可算無限個の K3 曲面を持つことが示された。その後 J.Li, C.Liedtke, また F.Bogomolov, B.Hasset, Y.Tschinkel, らによる精密化がなされたが未だ完全には解決していない。本研究ではこれらの先行研究とは異なる視点によりこの問題を調べた。主な考え方は、平面曲線の場合におけるトロピカル幾何学と正則曲線の対応が簡明であった理由が 1920 年代に F.Severi が考えた代数曲面上の代数曲線の semiregularity にあることに着目すること、及び組み合わせ的な議論により非常に多くの退化した有理曲線を構成すること、さらにそれらの有理曲線と種数の高い曲線の変形理論を比較することにより、有理曲線の変形可能性を示すことである。そのためにまず semiregularity の概念を正規交差多様体からの写像に拡張し、特に余次元 1 の多様体からの写像の場合には変形が写像の先の多様体の標準束で統制されることを明らかにした。特に写像の先が K3 曲面のような Calabi-Yau 多様体である場合には、変形には位相的な障害しかないことを明らかにした。これにより多くの有理曲線を構成できるが、付随して種数正の曲線に対しても次を示した。すなわち、モジュライ空間において Zariski 位相に関する開集合があり、そこに含まれる射影的 K3 曲面は次の性質を持つ。任意の 1 以上の g について、種数 g の曲線の g 次元の族が可算無限個存在する。当初の目的である有理曲線の構成については、組み合わせ的な議論を合わせてより強い結果を示すために研究を継続している。

(4)複素曲面上の正則ディスクの構成

以前の研究 T.Nishinou, Disc counting on toric varieties via tropical curves, Amer. J. Math., Volume 134, (2012), 1423-1472.及び新しく得られた安定写像の変形の障害に

関する結果を用いて、Lagrangian ファイブレーションを持つ代数曲面上の Lagrangian 部分多様体を境界を持つ正則ディスクの数え上げに関する結果を得た。このようなディスクの数え上げは Floer コホモロジー論における重要な不変量であるとともに、ミラー対称性の観点からも重要であることが知られている。Fano 多様体の場合はこのような数え上げは比較的やさしいことが知られているが、そうでない場合は変形理論の困難により正確な結果が知られている場合はほとんど存在しない。本研究ではこれまでに得られた障害のある変形理論に対する知見を応用して、Hirzebruch 曲面の場合にこのような数え上げを実行した。次数の低い Hirzebruch 曲面に対しては完全に数え上げができた。現在は一般の次数に対して完全に解決できるように研究を進めている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

①西納武男, Degeneration and curves on K3 surfaces, 代数幾何学シンポジウム記録, 査読なし, (2015), 38-50.

②西納武男, Tony Yue Yu, Realization of tropical curves in abelian surfaces, Oberwolfach reports, 査読なし, (2015), 1267-1268.

[学会発表](計 14 件)

①西納武男, 多様体の退化と正則曲線, 大岡山談話会, 東京工業大学, 2017.11.8.

②西納武男, Periodic plane tropical curves and holomorphic curves on tori, Pacific Rim Conference 2017.8.1. Pohan

③西納武男, 多様体の退化と変形理論, 学習院早稲田幾何セミナー, 2016.10.3.

西納武男, On a construction of holomorphic disks, 東京大学幾何コロキウム, 2016.6.3.

西納武男, Degeneration and curves on K3 surfaces, Topics on tropical geometry, integrable systems and positivity, 青山大学, 2015.12.23.

西納武男, Degeneration and curves on K3 surfaces, Mirror Symmetry and Algebraic Geometry 2015, 京都大学, 2015.12.8.

西納武男, Degeneration and curves on K3 surfaces, 城崎代数幾何シンポジウム, 2015.10.20.

西納武男, Realization of tropical curves in complex tori, 東京大学幾何コロキウム, 2015.7.17.

西納武男, Realization of tropical curves in abelian surfaces, Tropical Aspects in Geometry, Topology and Physics, Oberwolfach 2015.4.29.

西納武男, Degeneration and curves on K3 surfaces, 東京大学幾何コロキウム, 2015.1.16.

西納武男, Degeneration and curves on K3 surfaces, Conference on Tropical Geometry, Saas Fee (Switzerland), 2014.11.25.

西納武男, On Brill-Noether loci of graphs, 九州大学幾何セミナー, 2014.7.18.

西納武男, On Brill-Noether loci of graphs, Mathematics New Goals, Tainan (Taiwan), 2014.7.4.

西納武男, トロピカル曲線と複素幾何学, 立教大談話会 2014.5.7.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西納 武男 (NISHINO, Takeo)

立教大学・理学部・准教授

研究者番号: 50420394