

平成 30 年 5 月 23 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400062

研究課題名(和文) 測度空間に於ける拡散現象の大域的解析及び収束理論

研究課題名(英文) Global properties and the theory of convergences of diffusion processes of measure spaces

研究代表者

正宗 淳 (Masamune, Jun)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：50706538

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主目的は、多様体のラプラス作用素とブラウン運動の一般化である「測度空間の作用素及びマルコフ過程」の大域的理論と収束理論を発展させ、幾何学への応用をはかることである。それに関して研究期間全体を通して以下の成果を得た。(1) ディリクレ形式の保存則ならびに再帰性の決定(2) 多様体ならびにグラフの(L1とL2)リユール性の特徴付け(3) 多様体の一般化された保存則を定式化して、それをリユール性を用いた特徴付け(4) ラプラシアンの本質的自己共役性の確率論的を得た。これらで得られた成果は研究課題を進展させ、さらに、測度空間の作用素とマルコフ過程論に関するいくつかの予想を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we aim to develop the global analysis of diffusion processes on measure spaces associated with some Markov processes. The main results in this projects are (1) conservation property and recurrence of general Markov processes in terms of Green's formula (2) Characterizations of Liouville type problems of Riemannian manifolds and graphs (3) Generalized conservation property of Brownian motion with killing inside and its characterizations (4) Probabilistic characterization of the essential selfadjointness of the Laplacian of Euclidean space removed a compact set.

研究分野：幾何学

キーワード：保存則 再帰性 リユール性 ディリクレ形式 本質的自己共役性

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1)多様体のブラウン運動の大域的性質はある種のグリーンの公式により特徴付けられることが知られており、これをより一般のディリクレ形式に拡張することが求められていた。(2)多様体のリュービル性については、完備多様体のL2リュービル性、また、L1の場合については曲率条件しか知られておらず、そのポテンシャル論的、確率論的な意味は不明であった。(3)ラプラシアンに対応する拡散方程式の保存則はある種のリュービル性で特徴付けられることがよく知られている。この特徴付けはカシミンスキーテストと呼ばれる。一方、ラプラシアンを一般化したシュレディンガー作用素に対応する拡散方程式に対してはカシミンスキーテストが成立しないことが具体例から分かる。(4)多様体のコンパクト集合が極であることと、また、そのコンパクト集合を取り除いた多様体で定義されたラプラシアンに対してはマルコフ拡張の一意性が成立すること、これら二つの条件が同値であることは知られていたが、より一般の本質的自己共役性の場合には不明であった。

### 2. 研究の目的

本研究課題の目的は、多様体のラプラス作用素とブラウン運動の一般化である「測度空間の作用素及びマルコフ過程」の大域的理論と収束理論を発展させ、幾何学への応用をはかることである。より具体的には基礎的かつ重要だと思われる上述の4つの課題を解決することを目標とした。

### 3. 研究の方法

Grigoryan (ドイツ)や Lenz (ドイツ)、村田 實を含む、本課題に関する国内外の研究者集団との共同研究を行う。また、国際研究集会を開催して、研究成果を報告する。

### 4. 研究成果

主に以下の4つの成果を得た。

(1)ディリクレ形式の保存則ならびに再帰性の決定。本研究の主目的の一つは、マルコフ過程と呼ばれる重要な確率過程のクラスの長時間挙動における問題の解決にある。より具体的には、基礎的かつ中心的問題である、マルコフ過程の「再帰性」と「保存性」と呼ばれる性質を調べ、さらに、それらの性質をマルコフ過程が定義されている空間の無限遠の幾何学で特徴付けを行うことを目標とした。マルコフ過程の重要な具体例である、グラフ及びリーマン多様体の乱歩及びブラウン運動の再帰性とこれらの空間の無限遠における関係については古来深い研究が行われており、多くのことが知られている。特に、ベクトル場及び関数に対するグリーンの公式の類似により様々な特徴付けがなされてきた。一方、保存則の決定の問題は再帰性の問題よりも困難であり、特に、グリーンの公式による特徴づけは、A. Grigoryan and J. Masamune (2013)による重み付きリーマン多様体のブラウン運動に対する結果しか存在しない。従来の研究はマルコフ過程の長時間挙動が空間の無限遠の幾何学と密接に関連することを示唆するが、そこにおける議論においてはグラフ及びリーマン多様体の空間としての特徴が本質的に用いられており、それらの手法をより一般の空間で展開することは不可能である。すなわち、一般的な状況においては、マルコフ過程の再帰性及び保存性が、それが定義されている空間の無限遠の幾何学で特徴付けされるかは不明であった。本研究はこの問題を追及し、非常に一般的な状況でまずグリーンの公式を定式化し、さらに、それをを用いてマルコフ過程の再帰性と保存性を空間の無限遠の幾何学で特徴付けた。この研究で得られた結果は、D. Lenz et alとの共同研究として論文にまとめられ、Calculus of Variations and PDEsから出版された。

(2)本研究の主目的の一つは、多様体のある点からスタートしたブラウン運動が無限遠に到達する時間の期待値(torsion function)と多様体の無限遠における幾何学と解析の関係を明らかにすることである(Alexander Grigoryanと村田實との共同研究)。一方、L1リュービル性はその意味が不明であった。この研究ではこの問題を追及し、torsion function による、正の値を持つ調和函数のL1リュービル性の特徴づけ、エバンス・ポテンシャルによる正と負の値を持つ調和函数のL1リュービル性の特徴づけを行なった。また、L2リュービル性の物理的意味を追及した。上述した研究により、L1リュービル性がブラウン運動の無限遠における振る舞いと密接に関係していることが分かったが、本研究では、L2リュービル性はラプラシアンの本質的自己共役性、すなわち、量子力学における基本的概念と密接に関係することが明らかになった(Radek Wojciechowskiとの共同研究)。従来のS.T-Yauなどによる研究から、完備多様体はL2リュービル性を満足し、また、ラプラシアンは本質的自己共役性であることが独立した研究により知られていたが、本研究ではそれらの間の直接的な関係を明らかにした。

(3)ディリクレ形式の長時間挙動の重要な問題は保存則の決定である。ディリクレ形式はポテンシャル項を持つと保存則が成立しないため、従来の保存則の研究はポテンシャルがない場合に限定されてきた。最近、Lenz-Kellerにより、離散シュレディンガー作用素 に対して、一般化された保存則「stochastic complete at infinity」の概念が提唱された。この研究は非常に重要であるが、最も重要な例であるリーマン多様体のシュレディンガー作用素の場合については何も知られていなかった。そこで、M. Schmidt と協力して、リーマン多様体のシュレディンガー作用素に対して「一般化された保存則」を

定式化し、さらに、それをリュービル性や熱方程式の解の一意性により特徴づけた。すなわち、カシミンスキーテストの一般化に成功した。また、シュレディンガー作用素の解の正則性、最大値原理、熱核の構成など、リーマン多様体のシュレディンガー作用素の解析と幾何学の基礎理論の構築も行った。

(4)本研究の目的は、ラプラシアンの本質的自己共役性の確率論的特徴付けである(M. Hinz との共同研究)。ユークリッド空間から閉部分集合を取り除いた空間で定義されたラプラシアンが本質的自己共役であることと、その集合を2パラメータ・ブラウン運動がヒットすることが同値であることを示した。これは、よく知られている事実である、(本質的自己共役性より弱い)マルコフ拡張の一意性とその集合をブラウン運動がヒットすることが同値であることの一般化だと考えられる。この結果は、Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics から出版された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計3件)

(1) Funamoto, K; Yoshino, D; Matsubara, K; Zervantonakis, I; Funamoto, K; Nakayama, M; Masamune, J; Kimura, J; and K. Roger. Endothelial monolayer permeability under controlled oxygen tension, Integrative Biology, 査読有り, Issue 6 (2017), 529-538. DOI:10.1039/C7IB00068E.

(2) Hinz, M; Kang, S; Masamune, J. Probabilistic characterizations of essential self-adjointness and removability of singularities. Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics. 査読有り, (2017), Volume 20, Issue 3, 148-162.

DOI:0.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.11

(3) Haeseler, S; Lenz, D; Keller, M; Masamune, J; Schmidt, S. Global properties of Dirichlet forms in terms of Green's formula, Calculus of Variations and PDEs, 査読有り, 56 (2017), no. 5, Art. 124, 43pp

DOI:10.1007/s00526-017-1216-7

〔学会発表〕(計9件)

(1) Masamune, J. A conservation property of Brownian motion with killing of a Riemannian manifold at Analysis and PDEs on Manifolds (Nankai) 21.09.2017-23.09.2017

(2) Masamune, J. Generalized conservation property at Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017 (Kaiserslautern) 04.09.2017-08.09.2017

(3) Masamune, J. H-convergence on Riemannian manifolds at Analysis and Geometry on Graphs and Manifolds (Potsdam) 31.07.2017-04.08.2017

(4) Masamune, J. Existence of integrable non-trivial harmonic functions on complete manifolds at Mathematical Aspects of Quantum Fields and Related Topics (RIMS) 26-28.06.2017

(5) Masamune, J. H-convergence on Riemannian manifolds at Probability Seminar at Kansai University (Kansai Univ) 14.01.2017.

(6) Masamune, J. Some theories and applications of homogenization theory, 均質化理論と局所体積平均理論の融合及びその新展開(九州IMI), 23-25.11.2016.

(7) Masamune, J. Constructions of non-trivial integrable harmonic functions on narrow or ample manifolds at Math Colloquium (北海道大学) 02.11.2016

(8) Masamune, J. On the L1 Liouville property of a manifold with ends at Geometry and Probability (RIMS), 28.10.2016.

(9) Masamune, J. Essential selfadjointness of the Laplacian and 2-parameter Brownian motion at 量子系の数理と物質制御への展開 II: 量子ウォークを架け橋に(東北大学), 18.10.2016.

〔図書〕(計0件)該当なし

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

該当なし

取得状況(計0件)

該当なし

〔その他〕  
ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~jmasamune/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

正宗 淳 (MASAMUNE, Jun)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号: 50706538

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし

(4) 研究協力者

該当なし