様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００６５

研究課題名（和文）複比とその仲間たち

研究課題名（英文）Cross ratio and its falks

研究代表者
金井　雅彦（KANAI, Masahiko）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：７０１８３０３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：複比の歴史は古代ギリシャまで遡ることが可能である．それにも関わらず，複比やその仲間たちであるシュワルツ微分・パラケーラー構造・測地カレントに対するわたしたちの理解は極めて限定的であると言わざるを得ない．本研究はそららの対象に対するわたし達の理解を改善することを目的としていた．とくにパラケーラー幾何から出発して，ルジャンドル結び目のエネルギーの新たな定義，および双曲空間内の超曲面のガウス写像の新たな定義を得た．１，２年のうちにこれらの概念に対する新理論を展開していくつもりである．

研究成果の概要（英文）：The history of cross ratio goes back to ancient Greece. Nevertheless, our understanding on it or its "falks", namely, Schwarzian derivative, para-Kaehler structures and geodesic currents seems quite restrictive. The present research aimed at improve our understanding on them. In particular, starting from para-Kaehler geometry, we discovered new definitions of to the energy of legandrian knots and of the Gauss maps of hypersurfaces of the hyperbolic space. We are going to develop new theories on those new objects in a year or two.

研究分野： Geometry

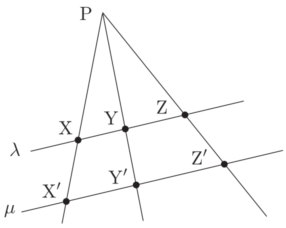
キーワード： 複比　パラケーラー構造

１．研究開始当初の背景

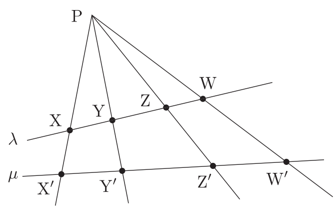
二千年内外の歴史を有するという**複比**のまたの姿ともとらえられるべき**シュワルツ微分**，**パラケーラー構造**，**測地カレント**が誕生したのは，それぞれ１８世紀後半，２０世紀中盤，同後半である．複比，およびそれに後続するこれら諸概念の数々の目覚ましい応用を通じて，それらの有用性が高く評価されている．それらも複比に秘められた力と解釈されるべきものであろう．これらの発見が複比の長大な歴史と比して近年になされたことを考えれば，複比に対するわれわれの現時点での理解は不完全で，その真価は未だ秘されたままであると考えるのは自然であろう．これら諸概念のさらなる応用，およびそれらの亜種・新種の発見を通じて，それらに対する真の統一的な理解を目指す．

２．研究の目的

まずは，複比・シュワルツ微分・パラケーラー構造・測地カレントがそもそも何であったかを思い起こしたい．そして，その中で本研究課題が意図するところを徐々に明らかにしていこう．



(a) 2 直線が平行である場合



(b) 2 直線が平行でない場合

【複比 (cross ratio)**】**[1] 右図 (a) において 2 本の直線 λ, μ が平行であれば，

$$\frac{\mathrm{XY}}{\mathrm{YZ}} = \frac{\mathrm{X'Y'}}{\mathrm{Y'Z'}}$$

が成り立つ．2 直線が平行でない場合には，もはやこの等式が成立しないのは言うまでもない．しかし，そうであっても，右図 (b) において，

$$\frac{\mathrm{XZ}}{\mathrm{YZ}} \cdot \frac{\mathrm{YW}}{\mathrm{XW}} = \frac{\mathrm{X'Z'}}{\mathrm{Y'Z'}} \cdot \frac{\mathrm{Y'W'}}{\mathrm{X'W'}}$$

は成り立つ．この第 2 の等式の両辺に現れるのが複比である．すなわち，

$$|x, y, z, w| = \frac{|x-z|}{|y-z|} \cdot \frac{|y-w|}{|x-w|}$$

$(x, y, z, w \in \mathbb{P}^1 := \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ により**複比**は定義される．

【シュワルツ微分】[2] 開区間上で定義された（向きを保つ）C^3 級実数値関数 f に対し，その**シュワルツ微分** (Schwarzian derivative) が

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

により定義される．シュワルツ微分が複比から導出可能であることは，前世紀中葉から “folk theorem” の類として知られているようである．実際，

$$\frac{3}{4}\left|f(x), f(x+\epsilon), f(x+2\epsilon), f(x+3\epsilon)\right| = 1 + \frac{1}{6}S(f)(x)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

が成り立つ．すなわち，シュワルツ微分は複比の無限小化の一種である．

【パラケーラー構造】$\mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^1$ を双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の理想境界と同一視する．このとき，$P = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \setminus$ (対角集合) は，双曲平面内の（向き付けられた）測地線全体と見なせる．すなわち，P は $\mathbb{H}^2$ の測地流の軌道空間である．したがって，**リュービル形式** (Liouville form) と呼ばれる標準的シンプレクティック形式 ω を空間 P は有する．このとき，$x, y, z, w \in \mathbb{S}^1$ に対し，

$$|x, y, z, w| = \exp \int_{\widehat{xy} \times \widehat{zw}} \omega$$

が成り立つ（ただし，$\widehat{xy}$ は，点 x, y を端点とする円弧を表す）．すなわち，複比はリュービル形式の積分形である．あるいは，逆の言い方をすれば，リュービル形式 ω は複比のもうひとつの無限小化である．このことを指摘したのは，J.-P. Otal (1992) であった．かたや古代

[1]複比の起源は，アレクサンドリアのパップス (290-350 年) まで，さらに一説によればユークリッド（紀元前３世紀頃）まで遡ることができるとのことである．

[2]シュワルツ微分を初めて考えたのは Lagrange, 1781 年のことであったそうである．

に発見されたという複比，もうかたや１９世紀を代表する数学・物理学のひとつであるところのハミルトン力学のその「エンジン部」とでも言うべきシンプレクティック形式，これらふたつが同源のものであることが認識されたのは，いまからわずか 20 年前のことであった．われわれの複比に対する理解がいかに貧弱なものであったかを示唆する格好の事例がここにある．それから二十年経った現在でも事態は大きく変わらないと推察される．この認識こそが，本研究計画の出発点であった．

ところで，測地流の相空間，すなわち双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の単位接束 $T^1\mathbb{H}^2$ は，P 上の主 $\mathbb{R}$-束である．しかも $T^1\mathbb{H}^2$ 上の標準的な接触形式は，主束 $T^1\mathbb{H}^2 \to P$ の接続と見なすことができる．そして，その接続の曲率がまさにリュービル形式である．すなわち，複比は曲率の「積分形」である．

空間 $P \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ は，積構造から定まるふたつの横断的な 1 次元葉層構造 $\mathcal{F}^-$, $\mathcal{F}^+$ を有する．これらふたつの葉層構造がシンプレクティック形式 ω に関しラグランジュ的 (lagrangian) であることは明らかである．一般に，シンプレクティック形式とふたつの横断的なラグランジュ葉層構造 $\mathcal{F}^-$, $\mathcal{F}^+$ の組 $(\omega, \mathcal{F}^-, \mathcal{F}^+)$ は**パラケーラー構造**[3] と呼ばれる．上述の $(\omega, \mathcal{F}^-, \mathcal{F}^+)$ がもっとも簡単な「非自明」なパラケーラー構造の例である．

【測地カレント】 再び空間 $P = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \setminus$(対角集合) を考える．この空間は積構造 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ から定まる自然な対合を有する．その対合により不変な P 上のボレル測度を，**測地カレント** (geodesic current) と呼ぶ．リュービル形式が定める測度がその典型例である．したがって，測地カレントはリュービル形式の一般化であるととらえることが可能である．とくに $PSL(2, \mathbb{R})$ の離散部分群 Γ により不変な測地カレントを考えることが多い．測地カレントを導入したのは，F. Bonahon (1986) である．タイヒミューラー空間のサーストン・コンパクト化，およびタイヒミューラー空間上のヴェイユ・ピーターソン計量の再構成を行うことが，その目的であった．A. Navas (2002) による性質 (T) を有する群の円周 $\mathbb{S}^1$ への作用に関する画期的な成果においても，測地カレント（あるいは複比）が必要不可欠な役割を果たしていることを忘れてはなるまい．定義だけをみれば他愛のないこの測地カレントであるが，リーマン面や円周など低次元を舞台としたときにその力は絶大である．

【目的】 複比に後続するシュワルツ微分等の概念は，複比の「活用形」ととらえることができる．[4] その活用の背後にあるはずの「文法」を探りながら，複比・シュワルツ微分・パラケーラー構造・測地カレントのさらなる応用（これについては「研究計画」の欄で再考する）を追求する．そして，これら諸概念の亜種・新種を発見を目指しつつ，本来は同根であるはずのこれら諸概念に対する統一的な理解を確立することを最終的な目的とする．

３．研究の方法

まず，主に 1) 高次元シュワルツ微分と群作用の剛性について研究を行う予定である．さらに，以下の問題にも取り組みたいと考える：2) パラケーラー構造と双曲空間の部分多様体のガウス写像；3) パラケーラー構造と結び目．かつて申請者自身により得られた定理の証明の改良を目指すのが第１の問題である．自身の仕事に密接に関係しているだけでなく，新たな証明の「筋書き」も具体的であり，初年度の比較的早い時期に完成する見込みである．第２，第３の問題は「的」が大きく，それをはずす恐れは極めて小さいと思われる．最初の成果をあげるのは容易であろう．もし可能であれば，

[3]「パラケーラー多様体」という呼び名は P. Libermann (1954) によるものである．かつてこの用語を知らなかった申請者は，自身の論文 *"Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations"* (by M. Kanai, appeared in Ergodic Theory Dynam. Sys., **8** (1988), 215–239) において "bipolarized symplectic manifold" という用語を代わりに用いた．なお，この論文およびそれに続く申請者による数本の論文は，力学系理論および幾何学に対するパラケーラー構造の格好な応用例と考えられる．

[4]このことを明言した文献，あるいは数学者をわたしは知らない．

さらに 4) 曲率としての複比の応用，5) 高次元測地カレントの定義，6) 複比等の概念の亜種の発見など，より野心的な問題に挑みたいと考えている．

４．研究成果

(1) 複比と密接に関係のあるシュワルツ微分を群作用の剛性問題に応用することが，本研究課題の主要な目的のひとつであった．それについては残念ながら研究は停滞したままであった．そもそもこの計画はわたし自身が 1990 年代に行った研究に端を発する．その研究において，ある離散群の作用の局所剛性を証明した．後年，その研究のなかに，高次元シュワルツ微分が現れていたことを認識する．これを手がかりに，その先行研究において実現できなかった点を改良したいというのが，この問題である．より具体的に言うと，わたしのかつての結果では，群が作用している球面の次元が十分大きいことを仮定する必要があった．しかし，これは過剰な仮定であることが知られている．その仮定を除去したいというのが，わたしの目指すところである．なぜ過剰な仮定が必要であったかの理由も理解しているつもりである．かつてのわたしの証明においては，そもそも与えられた球面への群作用をより大きな空間に持ち上げてそれを解析するということを行っている．その大きな空間には自然な葉層構造が備わっているが，2 次元球面の場合のように自然な力学系は見いだせない．しかし，より大きな空間に作用を望む仕方で持ち上げることができれば，そこには自然な力学系が定義されており，2 次元球面の場合のようにそれを用いて目的を達成することができると期待される．この計画を実現するための最大の困難は，より大きな空間に持ち上げた群作用（この持ち上げ自体はすでに構成を終えている）が固有不連続であることを示す点にある．これは純粋に力学系理論的問題である．そして，それが肯定的に解けることを主張する古い文献が存在するのだが，その証明が必ずしも信頼できるものではないようであるとの指摘を専門家から受けた．その古い結果の別証明を試みているが，現時点ではまだ完成していない．

(2) 一方，複比の末っ子とでもいうべきパラケーラー構造に関しては，その応用が，ルジャンドル結び目，および双曲空間の超曲面に応用を持つことが研究当初から期待されていた．より具体的に言えば，ルジャンドル結び目に特化したエネルギーの新たな定義，および双曲空間の超曲面に対する新たなガウス写像の定義が与えられることを予想している．これらに関しては，わたしが指導にあたる大学院生たちの助けを借り，研究は進行している．論文等のかたちで研究成果を発表するには現時点では時期尚早ではあるが，前者に関しては今年度中に，また後者に関しても来年度中に成果を発表できるのではないかと期待している．

５．主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 0 件）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

６．研究組織

(1) 研究代表者

金井 雅彦 (KANAI, Masahiko)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：70183035

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし