

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 19 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400077

研究課題名(和文)写像類群、Coxeter群、Artin群のコホモロジー

研究課題名(英文)Cohomology of mapping class groups, Coxeter groups and Artin groups

研究代表者

秋田 利之(Akita, Toshiyuki)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：30279252

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では閉曲面の写像類群、Coxeter群とArtin群およびそれらに関連する群のコホモロジーを主な対象とした。成果としてCoxeter群に関しては(1)Coxeter群のp局所的ホモロジー群に対する消滅定理(2)有限Coxeter群の交代部分群のmod pコホモロジーに対する消滅定理を得た。Artin群に関しては(3)任意のArtin群の2次のmod 2ホモロジー群を完全に決定した。(2)と(3)はYe Liuとの共同研究である。最後にCoxeterカンドルの随伴群がCoxeter群Wの自由アーベル群による中心拡大かつWの交換子群と自由アーベル群の半直積の構造を併せ持つことを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied group cohomology of Coxeter groups, Artin groups and related groups. As for Coxeter groups, we obtain (1) a vanishing theorem for the p-local homology of Coxeter groups (2) a vanishing theorem for the mod p cohomology of alternating subgroups of finite Coxeter groups. As for Artin groups (3) we determined the second mod 2 homology of arbitrary Artin groups. (2) and (3) are joint works with Ye Liu. Finally, we proved that the adjoint group of an arbitrary Coxeter quandle is both a central extension of a Coxeter group W by a free abelian group and a semi-direct product of the commutator subgroup of a Coxeter group W and a free abelian group.

研究分野：トポロジー

キーワード：トポロジー Coxeter群 Artin群 群のコホモロジー カンドル

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Coxeter 群、Artin 群、閉曲面の写像類群はトポロジー・組合せ群論・幾何学的群論をはじめ様々な分野において活発に研究されている離散群である(対称群とブレイド群はそれぞれ Coxeter 群と Artin 群の代表的な例である)。これらの群のコホモロジーの研究は、群のコホモロジーにおいて重要なだけでなく、リーマン面のモジュライ空間、曲面束の特性類、複素超平面配置の補空間、様々な配置空間、ある種の特異点(鏡映群に同伴する discriminant singularity)の Milnor ファイバー、剛性など多様な対象に関連している。

写像類群の有理数係数の安定コホモロジー環は Madsen-Weiss (2007)による Mumford 予想の解決により構造が決定されていた。また任意の Coxeter 群の有理数係数コホモロジーは自明であることは研究代表者により証明されていた(2000)。このように写像類群と Coxeter 群の有理数係数コホモロジーの理解は進んでいたが、整数係数および mod p コホモロジー、局所係数コホモロジーに関しては未だに未解明の部分が大きかった。

また、有限型 Artin 群の整数係数コホモロジーは様々な数学者の研究により決定されていたが、一般の Artin 群のコホモロジーは有理数係数の場合もほとんど未知であった。

研究代表者は写像類群、Coxeter 群、それらの部分群の整数係数および mod p コホモロジーを研究してきた。また De Cocini-Salvetti により Coxeter 群と Artin 群のコホモロジーは“1 次近似”の関係にあることがわかっていった。そこでこれら 3 つの群のコホモロジーを研究することを思い立った。

2. 研究の目的

本研究の目的は閉曲面の写像類群、Coxeter 群、Artin 群およびそれらに関連する離散群のコホモロジーを研究することであった。本研究では (1) Coxeter 群と Artin 群のホモロジー安定性 (2) 写像類群と Coxeter 群の特性類 (3) コホモロジーの計算に実用的な自由分解の構成の 3 つのテーマを軸に研究を展開し、Coxeter 群、Artin 群、写像類群の整数係数および局所係数のコホモロジーを具体的に計算する方法を確立すること、コホモロジーの構造に関する理解を深めることを目的とした。

3. 研究の方法

ホモロジー安定性を証明する方法としてスペクトル系列を用いる方法と自由分解を用いる方法の二種類があるが、本研究でも両者を主な方法として考えていた。

一方、無限群の特性類が有限部分群上でどのように振る舞うかを調べることは、無限群の整数係数および mod p コホモロジーを研究するための主要な方法の一つであり、本研究でも写像類群の特性類、Coxeter 群の幾何学的表現の特性類に対しそのようなアプローチを取ることを考えていた。

最後に自由分解は離散群の分類空間の代数的なモデルであり、群の局所係数コホモロジーを計算するための基本的な道具の一つである。複素超平面配置の補空間を用いて Coxeter 群とある種の Artin 群の自由分解を構成できるが、複素超平面配置の代わりに Tits コーンを用いることで、そのような構成を一般化できると考えていた。

4. 研究成果

本研究の主要な研究成果は Coxeter 群のホモロジーの消滅定理、Coxeter 群の交代部分群のコホモロジー群の消滅定理、Artin 群の 2 次ホモロジー群の決定、Coxeter カンドルの随伴群の構造の決定に大きく分かれる。得られた結果を項目に分けて以下に述べる。

(1) Coxeter 群のホモロジー群の消滅定理

中岡稔氏による対称群のホモロジー安定性 (1960)と無限対称群の mod p ホモロジーの決定 (1961)の帰結として、対称群の p 局所的 (p -local) なホモロジー群の消滅定理が得られる。

対称群は Coxeter 群の代表例であるが、本研究では中岡稔氏の結果を任意の Coxeter 群に一般化することに成功した。証明の主要な道具は有限 Coxeter 群(有限鏡映群)の分類、Coxeter 複体とその軌道空間の高次の連結性、同変ホモロジーに収束する二つのスペクトル系列である。結果は論文にまとめて雑誌論文として出版済みである。

(2) Coxeter 群の交代部分群のコホモロジー群の消滅定理

Coxeter 群は交代部分群とよばれる部分群をもつ。対称群の交代部分群は交代群に他ならない。Kleshchev-Nakano (2001)および Burichenko (2003)は独立に交代群の mod p コホモロジーの消滅定理を証明していた。

本研究では任意の有限 Coxeter 群の交代部分群の mod p コホモロジーに対する消滅定理の証明に成功した(Ye Liu との共同研究)。この結果は先に述べた Kleshchev-Nakano と Burichenko の結果を著しく一般化したものであり、証明の手法も両者とは全く異なるものである。我々の証明の主要な方法は(1)と同様に有限 Coxeter 群(有限鏡映群)の分類、Coxeter 複体とその上の交代部分群の作用に対する軌道空間の高次の連結性、同変コホモロジーに収束する二つのスペクトル系列である。

さらに同様の消滅定理がある種の無限位数の Coxeter 群(アフィン Coxeter 群, コンパクトな双曲的 Coxeter 群)の交代部分群に対しても成立することを示した。また交代部分群のコホモロジーの消滅定理の応用として、有限 Coxeter 群のある種のねじれ係数コホモロジー群の消滅定理を得た。結果は Ye Liu との共著論文にまとめて雑誌論文として出版済みである。

(3) Artin 群の 2 次ホモロジー

既約な有限型 Artin 群の整数係数コホモロジー環は多くの数学者の研究により決定されている。一方、無限型 Artin 群のホモロジーは、Artin 群に対応する Salvetti 複体のホモロジーと同型であると予想されている(いわゆる $K(\cdot, 1)$ 予想)。 $K(\cdot, 1)$ 予想が証明されていない Artin 群の 2 次以上のホモロジー群はこれまで全くわかってなかった(1 次のホモロジーは Artin 群のアーベル化なので群の表示から容易に求まる)。

代表者は任意の Artin 群の 2 次の mod 2 ホモロジー群を完全に決定した(Ye Liu との共同研究)。我々の成果は $K(\cdot, 1)$ 予想が証明されていない Artin 群の高次のホモロジー群を決定した最初の例であり画期的なものである。同時に我々の結果は $K(\cdot, 1)$ 予想の肯定的証拠にもなっている。ホモロジーの決定は群の 2 次ホモロジーに対する Hopf の公式と Howlett による Coxeter 群の 2 次ホモロジー群の計算結果(1988)を組み合わせるによりなされた。

また応用として、極めて多くの Artin 群の族が、1 次と 2 次のホモロジー群に関してホモロジー安定性をもつことも証明できた。Artin 群のホモロジー安定性はブレイド群など一部の族を除きほとんど知られてなかった。結果は共著論文にまとめて学術雑誌に投稿中である。

(4) Coxeter カンドルの随伴群

カンドルは比較的新しい代数構造であり、主に低次元トポロジーと Hopf 代数の二つ

の分野で盛んに研究されている。任意の群からカンドルを構成することができ(共役カンドル)、逆に任意のカンドルに対して随伴群(adjoint group)とよばれる群が定義され、これら二つの構成は随伴の関係にある。随伴群は群の表示により定義されるため定義は単純だが、その構造を調べるのは一般には難しい。

n 文字の互換の全体は共役によりカンドルとなり、Hopf 代数の研究に於いて重要であった。その随伴群は Andruskiewitsch 等の研究(2011)と Eisermann の研究(2014)により構造が比較的解明されていた。

Coxeter 群の鏡映の全体はカンドルの構造をもち(以下 Coxeter カンドルと呼ぶ)、 n 文字の互換の全体のなすカンドルの自然な一般化となっている。本研究では Coxeter カンドルの随伴群を中心拡大と半直積の二つの異なる方法で特徴付けた。より具体的には随伴群が(i)対応する Coxeter 群の自由アーベル群による中心拡大(ii)Coxeter 群の交換子群と自由アーベル群の半直積の二つの構造を併せ持つことを示した。これは n 文字の互換の場合の Andruskiewitsch 等の結果と Eisermann の結果の著しい一般化になっている。結果は論文にまとめてプレプリントサーバーで公開済みである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

Toshiyuki Akita, Ye Liu, Vanishing ranges for the mod p cohomology of alternating subgroups of Coxeter groups, Journal of Algebra, 査読有, Vol. 473, 2017, pp. 132-141, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.11.005

Toshiyuki Akita, A vanishing theorem for the p -local homology of Coxeter groups, The Bulletin of the London Mathematical Society, 査読有, Vol. 48, 2016, pp. 945-956, DOI: 10.1112/blms/bdw063

[学会発表] (計 12 件)

Toshiyuki Akita, On the mod p cohomology of Coxeter groups and their alternating subgroups, ホモトピー論シンポジウム, 2016 年 11 月 13 日、県立広島大学サテライトキャンパス(広島県・広島市)

Toshiyuki Akita, Second mod 2 homology of Artin groups, 東大火曜

トポロジーセミナー、2016年11月8日、
東京大学数理科学研究科(東京都・目黒区)

Toshiyuki Akita, Cohomology of Coxeter groups and related groups, Perspectives on arrangements and configuration spaces, 2016年9月9日、Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Scuola Normale Superiore di Pisa (イタリア, ピサ)

Toshiyuki Akita, Crossed modules and Artin groups, 京大代数トポロジーセミナー、2016年6月2日、京都大学数学教室(京都府・京都市)

Toshiyuki Akita, Homological aspects of Coxeter groups, 東京理科大学理工学部数学教室談話会、2015年11月2日、東京理科大学理工学部(千葉県・野田市)

Toshiyuki Akita, Homology of Coxeter groups, 変換群論フォーラム研究会、2015年3月8日、日本特殊陶業市民会館/愛知県産業労働センター(愛知県・名古屋市)

Toshiyuki Akita, Vanishing theorems for the homology of Coxeter groups and their alternating subgroups, 有限群のコホモロジー論とその周辺、2015年2月19日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

Toshiyuki Akita, Vanishing theorems for the homology of Coxeter groups and their alternating subgroups, Workshop and Seminar on Topological Combinatorics and Related Topics, 2015年1月7日、Department of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University (タイ、バンコク)

Toshiyuki Akita, Vanishing theorems for p-local homology of Coxeter groups and their alternating subgroups, 東京大学トポロジー火曜セミナー、2014年10月21日、東京大学数理科学研究科(東京都・目黒区)

Toshiyuki Akita, Vanishing theorems for p-local homology groups of Coxeter groups and their alternating subgroups, The 1st Workshop of JSPS-MAE Sakura Program "Geometry and Combinatorics of Hyperplane Arrangements and Related

Problems, 2014年9月2日、北海道大学数学教室(北海道・札幌市)

Toshiyuki Akita, Vanishing theorem for p-local homology of Coxeter groups, 九州大学トポロジー金曜セミナー、2014年6月6日、九州大学数理学研究院(福岡県・福岡市)

Toshiyuki Akita, Coxeter 群のホモロジーの p-primary component について、RIMS 共同利用研究集会「変換群の位相幾何と代数構造」、2014年5月30日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

秋田 利之 (AKITA, Toshiyuki)
北海道大学・理学研究院・准教授
研究者番号: 30279252

(2) 研究分担者

吉永 正彦 (YOSHINAGA, Masahiko)
北海道大学・理学研究院・准教授
研究者番号: 90467647

(3) 連携研究者

佐藤 隆夫 (SATO, Takao)
東京理科大学・理学部第二部・准教授
研究者番号: 70533256