様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００７８

研究課題名（和文）微分幾何学の特異点論的研究とその応用

研究課題名（英文）Singularity theory of differential geometry and its application

研究代表者
高橋　雅朋（TAKAHASHI, Masatomo）

室蘭工業大学・工学研究科・准教授

研究者番号：８０４３１３０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：微分幾何学の特異点論的研究とその応用として、特異点を持つ平面曲線としてルジャンドル曲線、特異点を持つ空間曲線として枠付き曲線、特異点を持つ曲面として枠付き曲面の定式化を行い、曲率、基本不変量を導入することで存在と一意性の証明を行いました。また、微分幾何学的な対象でもある縮閉線、伸開線、包絡線、焦面の研究をルジャンドル曲線、枠付き曲線に対して行いました。さらに、ラグランジュ特異点論とルジャンドル特異点論の研究として、ラグランジュ同値によるラグランジュ部分多様体芽の分岐の生成的な分類を与えました。また、幾何構造Dnに付随する接線曲面の生成的な分類や微分幾何学、微分方程式の性質の研究を行いました。

研究成果の概要（英文）：As singularity theory of differential geometry and its applications, we have studied a theory of Legendre curves, framed cuvres and framed surfaces. We gave the existence and the uniqueness for them by using the curvatures or the basic invariants. We investigated the evolutes, involutes, envelopes and focal surfaces for Legendre curves and framed curves. Moreover, we gave a generic classification of bifurcations of Lagrangian submanifold germs by one-parameter Lagrangian equivalence. Furthermore, we gave a generic classifications of tangent surfaces associated with Dn geometry and studied the properties from the viewpoint of differential geometry and differential equations.

研究分野：特異点論

キーワード：特異点論　微分幾何学　曲線論　曲面論　ルジャンドル特異点論　ラグランジュ特異点論　曲率　微分方程式

１．研究開始当初の背景

特異点論、特に写像の特異点論は H. Whitney に始まり、J. Milnor、R. Thom、J. Mather 等の研究により多様体の性質や写像の性質を研究するために考察されたものであり、多様体や写像のはめ込み、埋め込み、モース理論、カタストロフ理論、開折理論等は、幾何・トポロジーはもちろんのこと代数や解析における分野とも関わりがあります。特異点論はその汎用性により様々な分野と関わりがあり、特異点論とその応用は期待される分野です。

（１）特異点を許容する曲線・曲面の微分幾何学の構築：正則な曲線論・曲面論は古典的に知られており古くから様々な方々が様々な状況で研究されてきました。近年、特異点を許容する曲線・曲面の微分幾何学的な研究が盛んになされています。特に、フロント(波面)に対して、微分幾何学的性質の研究があります。また、フロントの曲線・曲面に対しては特異点論を用いて微分位相幾何学的、トポロジー的研究もあります。さらに、それらの生成的な特異点の判定条件とその応用に関する研究があります。しかし、これらの研究のほとんどが生成的な特異点あるいは生成的な分岐に現れる特異点を許容した曲線・曲面に対しての研究です。生成的な特異点の研究は、初期の研究対象としては非常に重要であり大切なことですが、特異点を直接的に応用するためには、生成的な特異点だけではなく、より一般的な特異点を直接的に扱う必要があります。特異点を許容する平面曲線としてルジャンドル曲線に対して、フロンタルの動標構を導入し、２つの関数の組として新たなルジャンドル曲線の曲率を導入することで、曲率とルジャンドル曲線の存在と一意性を証明しました。これは正則な平面曲線に対する結果の拡張であり、より一般的な特異点を許容する平面曲線(フロンタル)に対して研究を行うことが可能になります。例えば、この曲率を用いることで、特異点を持つ縮閉線や伸開線の研究を行い、縮閉線と伸開線の微分幾何学的な性質が分かりました。そこで、平面曲線の場合だけではなく、特異点を許容する高次元の曲線(特に空間曲線)と曲面に対して研究を行います。

（２）微分方程式と微分位相幾何学への応用：微分方程式の解の存在や性質は古くから研究されており現在も活発に研究されています。例えば、曲率の変化に従い曲線が動く曲線短縮方程式や平均曲率流方程式など様々な研究があります。しかし、特異点がある場合は曲率自体が発散してしまうため、方程式自体が定義されず、今までの手法ではそれ以上の大域的な解析はできません。そこで特異点論的手法・考察により特異点が現れる場合に対して定式化を行い、解の存在と性質の研究を行います。また、微分位相幾何学に対しても正則曲線の場合であれば、曲率と位相不変量の関係があるように、新たな曲率(ルジャンドル曲線の曲率)を用いて不変量の関係に対して研究を行います。

２．研究の目的

本研究課題「微分幾何学の特異点論的研究とその応用」では、新たな特異点論的手法・考察を用いて、特異点を許容する曲線・曲面の微分幾何学に対する理論の構築と微分方程式と微分位相幾何学への応用を行うことが目的です。具体的には次の事柄について研究を行います。

（１）特異点を許容する曲線・曲面の微分幾何学の構築：

①　余次元の高い曲線に対しては、ルジャンドル曲線のような曲線のクラスがありませんが、新たに独立性を持つ正則空間曲線やルジャンドル曲線の自然な拡張にあたる、枠付き曲線を定義し、枠付き曲線の曲率を導入することで特異点を許容する曲線の理論の構築を行うことが目的です。具体的には、基本定理として導入した曲率と枠付き曲線の存在と一意性を証明することが目的です。また、一般的に空間曲線を平面に射影すると特異点を持ちますので、枠付き曲線とルジャンドル曲線の関係を明らかにします。さらに、ルジャンドル特異点論の拡張として、母関数族によりルジャンドル曲線が与えられるか特異点論的研究を行い、同値関係や分類問題の研究を行います。正則な空間曲線に対しても、縮閉線や伸開線は特異点を持ちますので、枠付き空間曲線に対して、縮閉線と伸開線の定式化を行い、微分幾何学的性質の研究を行うことが目的です。

②　３次元空間内の曲面に対しても、枠付き曲面を定義し、枠付き曲面の曲率を導入することで、特異点を許容する曲面の理論の構築を行うことが目的です。ここでも、新たな曲率の幾何学的意味や性質、枠付き曲面の存在と一意性を証明することが目的です。また、正則曲面やフロントとの関連性も調べ、どのような拡張になっているのか、どのような特異点が許容されているのか明らかにします。さらに枠付き空間曲線との関係の研究を行います。曲面に対しても特異点が自然に現れる縮閉面や伸開面の定式化を行い、微分幾何学的性質の研究を行うことが目的です。

（２）微分方程式と微分位相幾何学への応用：

①　初期曲線が埋め込みの場合、曲線短縮方程式の解曲線は特異点を持たず、そのまま点に変形することが知られています。また、はめ込みの場合は途中の解曲線に特異点が現れることが知られており、爆発の様子などは解析的手法により研究されています。しかし、その後の大域的な解の存在や性質、特異点の分岐の様子は今までの解析的手法では明らかにされていません。そこで、特異点が現れ

る場合に対して大域的な解の存在や性質、特異点の分岐の様子を明らかにすることが目的です。

② フロント(ルジャンドルはめ込み)に対しては、曲率と位相不変量との関係が知られていますが、フロンタル(ルジャンドル曲線)に対しては、曲率と位相不変量の関係が知られていませんので、特異点を許容する曲線の微分位相幾何学への応用として、新たな位相不変量の構築を行い、分類問題に応用することが目的です。

３．研究の方法

（１）特異点を許容する曲線・曲面の微分幾何学の構築：

① 特異点を許容する空間曲線として、枠付き空間曲線を独立条件を満たす正則空間曲線とルジャンドル曲線の一般化として定式化を行います。枠付き曲線として平面曲線の場合は、単位接束上のルジャンドル曲線として研究を行い、ルジャンドル曲線の曲率における存在と一意性の基本定理の証明を行いました。空間曲線(余次元が高い曲線)の場合はルジャンドル曲線としてではなく、自然に、枠付き空間曲線として捉えることにより、特異点を許容する曲線として、新たな曲率を導入することができます。そこで、枠付き空間曲線に対して、まず曲率における存在と一意性を常微分方程式系の存在と一意性の議論などを用いることにより証明します。また、空間曲線を射影すると平面曲線になりますが、一般に特異点を持ちますので、枠付き空間曲線の射影がどの場合にルジャンドル曲線になるか、それぞれの動標講と曲率を用いることで、枠付き空間曲線とルジャンドル曲線の関係の研究を行います。

② 特異点を許容する曲面として、枠付き曲面を導入することで定式化を行います。枠付き曲面に対して曲率が導入できますが、正則曲面の場合の第一基本形式、第二基本形式との関係を考察し、枠付き曲面に対しても曲率における存在と一意性の証明を行います。枠付き曲面は、ある種のフロントの拡張でもあり、フロントの特異点ではない特異点も扱うことができますし、余次元が１の特異点だけでなく余次元が２の退化した特異点も含む理論ですが、うまくいかない場合は、曲面としてフロントの場合や余次元が１の特異点を許容する曲面の場合を参考にし、枠付き曲面の曲率との関係を考察することで研究を推進します。また、枠付き空間曲線の理論を用いて、枠付き曲面の曲率と枠付き空間曲線の曲率との関係を明らかにします。

（２）微分方程式と微分位相幾何学への応用：

① 初期曲線がはめ込みの場合、曲線短縮方程式の解曲線は途中で特異点が現れることが知られており、解析的に研究されていますが、その後の解の存在や特異点の分岐の様子などは分かりません。それは特異点のところでは曲率が発散することに原因があります。そこで、曲線をルジャンドル曲線に持ち上げて、曲線短縮方程式に対応する微分方程式を考え、その射影として元の曲線を捉えます。ルジャンドル曲線の曲率を用いることにより、対応関係を調べることにより、曲線短縮方程式に対応する微分方程式を作り大域解の存在や性質、特異点の分岐の様子を解析します。

② ルジャンドル曲線の曲率を用いて、新たな位相不変量の構築の研究を行います。曲線のフロントの場合は理論が知られていますので、フロンタルの場合に位相不変量が定義できるのか、フロントの場合を参考に研究を行います。また、不変量を保存する同値関係や分類問題の研究を行います。さらに、枠付き空間曲線の曲率と位相不変量の研究と枠付き曲面の曲率と位相不変量の研究を行い、同じく不変量を保存する同値関係や分類問題を考察します。

４．研究成果

（１）特異点を許容する曲線・曲面の微分幾何学の構築：

① 枠付き曲線に対して、曲率を導入し曲率における枠付き曲線の存在と一意性を示しました。また、射影に関するルジャンドル曲線との関係性を記述しました。さらに、枠付き曲線に対して、縮閉線、焦面を正則曲線に対する縮閉線、焦面を含む形で定義し、その微分幾何学的性質や特異点の関係を調べました。滑らかな曲線に対して、与えられた曲線の像が同じになる枠付き曲線の存在条件を求めました。

② 枠付き曲面に対して、基本不変量を定義し、基本不変量に関する枠付き曲面の存在と一意性を示しました。また、ガウス曲率、平均曲率に対応する関数を定義し、ルジャンドルはめ込み、枠付きはめ込みになる必要十分条件を与えました。さらに、ルジャンドル曲線族を枠付き曲線に沿わせた曲面が枠付き曲面になる条件を求め、特異点の判定法を用いて、カスプ辺、ツバメの尾、カスプ状交差帽子になるための必要十分条件を与えました。

③ 包絡線に対して、ルジャンドル曲線論が応用できることに気付き、ルジャンドル曲線族に対して包絡線を定義し、特異点を持つ曲線に対する包絡線の定式化を行いました。この結果、今までの定義では区別できなかった包絡線を区別することができました。また、包絡線は再びルジャンドル曲線になることが分かり、ルジャンドル曲率を計算し、性質を調べました。

④　球面内の特異点を持つ曲線や双曲空間、ド・シッター空間内の特異点を持つ空間的、時間的曲線として、ルジャンドル曲線を扱うことで、存在と一意性、ルジャンドル曲率を与え、縮閉線に対してルジャンドル双対性を用いることで性質を調べました。

（２）微分方程式と微分位相幾何学への応用：
①　幾何構造 D4, G2, Dn に付随する接線曲面に対する生成的な分類を行いました。また、双対性、三対性に付随する微分方程式を記述しました。その微分方程式の解がその双対、三対性から記述できることが分かりました。

②　ルジャンドル曲線を用いることにより、曲線短縮方程式の方程式をルジャンドル曲率の言葉で書き換えました。しかし、２つの関数による偏微分方程式系になるので、解の構造の解析は今後の課題になります。

③　ルジャンドル曲率を用いることによりルジャンドル曲線のホモトピー論は自明になることが分かりました。ルジャンドルはめ込みに制限するとアーノルドの結果により、不変量が再構成できます。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１３件）

① T. Fukunaga, M. Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves. Journal of Geometry. (2017), 査読有.
DOI: 10.1007/s00022-017-0371-5

② Masatomo Takahashi, Envelopes of Legendre curves in the unit tangent bundle over the Euclidean plane. Results in Mathematics. Vol.71 (2017), 1473-1489. 査読有.
DOI: 10.1007/s00025-016-0619-7

③ Masatomo Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes. Contemporary Mathematics. Vol.675 (2016), 337-355. 査読有.
DOI: 10.1090/conm/675/13600

④ G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Dn-geometry and singularities of tangent surfaces. RIMS Kôkyûroku Bessatsu. B55 (2016), 67-87. 査読有.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html

⑤ S. Honda, M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space. Advances in Geometry. Vol.16 (2016), 265-276. 査読有.
DOI: 10.1515/advgeom-2015-0035
https://muroran-it.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=9032&item_no=1&page_id=13&block_id=21

⑥ T. Fukunaga, M. Takahashi, On convexity of simple closed frontals. Kodai Mathematical Journal. Vol.39 (2016), 389-398. 査読有.
DOI: 10.2996/kmj/1467830145
https://muroran-it.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=9034&item_no=1&page_id=13&block_id=21

⑦ G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Singularities of tangent surfaces in Cartan's split G2-geometry. Asian Journal of Mathematics. Vol.20 (2016), 353-382. 査読有.
DOI: 10.4310/AJM.2016.v20.n2.a6

⑧ L. Chen, M. Takahashi, Dualities and evolutes of fronts in hyperbolic 2-space and de Sitter 2-space. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol.437 (2016), 133-159. 査読有.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.12.029
https://muroran-it.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=8625&item_no=1&page_id=13&block_id=21

⑨ T. Fukunaga, M. Takahashi, Involutes of fronts in the Euclidean plane. Beiträge zur Algebra und Geometrie. Vol.57 (2016), 637-653. 査読有.
DOI: 10.1007/s13366-015-0275-1
https://muroran-it.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=9031&item_no=1&page_id=13&block_id=21

⑩ T. Fukunaga, M. Takahashi, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane. Demonstratio Mathematica. Vol.48 (2015), 147-166. 査読有.
DOI: 10.1515/dema-2015-0015

⑪ G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Geometry of D4 conformal triality and singularities of tangent surfaces. Journal of Singularities. Vol.12 (2015), 27-52. 査読有.
DOI: 10.5427/jsing.2015.12c

⑫ M. Takahashi, Classifications of completely integrable implicit second order ordinary differential equations. Journal of Singularities. Vol.10 (2014), 271-285. 査読有.
DOI: 10.5427/jsing.2014.10s

⑬ T. Fukunaga, M. Takahashi, Evolutes of fronts in the Euclidean plane. Journal of Singularities. Vol.10 (2014), 92-107. 査読有.
DOI: 10.5427/jsing.2014.10f

〔学会発表〕（計９件）

① Masatomo Takahashi, Framed surfaces: smooth surfaces with singular points, Singularities and Differential Geometry in Changchun 2017, 2017 年 3 月 4 日, Northeast Normal University, Changchun (China).

② Masatomo Takahashi, Evolutes of curves in the Lorentz–Minkowski plane, 8th International Meeting on Lorentzian Geometry, 2016 年 9 月 22 日, Universidad de Málaga, Malaga (Spain).

③ 高橋雅朋，ルジャンドル曲線の１パラメータ族と包絡線，第２３回沼津研究集会，2016 年 3 月 9 日，沼津高専(静岡県･沼津市).

④ 高橋雅朋，ルジャンドル曲線族の包絡線，「幾何学と特異点」, 2016 年 3 月 3 日，東京学芸大学（東京都・小金井市).

⑤ 高橋雅朋，特異点を持つ曲線について，「幾何学発表会および講演会」，2016 年 3 月 2 日，東京学芸大学（東京都・小金井市).

⑥ 高橋雅朋，枠付き曲線と縮閉線，第２２回沼津研究集会，2015 年 3 月 10 日，沼津高専（静岡県・沼津市).

⑦ 高橋雅朋，球面ルジャンドル曲線と縮閉線，研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」， 2015 年 1 月 23 日，旭川市ときわ市民ホール（北海道・旭川市).

⑧ Masatomo Takahashi, Singularities of curves, Workshop on Singularities, Geometry, Topology and Related Topics, 2014 年 9 月 1 日, Northeast Normal University, Changchun (China).

⑨ Masatomo Takahashi, Evolutes of curves in the Lorentz-Minkowski plane, 13th International Workshop on Real and Complex Singularities, 2014 年 7 月 31 日, ICMC-USP, Sao Carlos (Brazil).

〔その他〕
ホームページ等
http://www.mmm.muroran-it.ac.jp/~masatomo/math.html

６．研究組織
(1)研究代表者
高橋　雅朋（TAKAHASHI Masatomo）
室蘭工業大学・工学研究科・准教授
研究者番号：80431302