様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月　 １ 日現在

機関番号：３２６４２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００８１

研究課題名（和文）結び目の有限型不変量による絡み目ミルナー不変量の表現

研究課題名（英文）Study on Milnor invariants via finite type invariants

研究代表者
安原　晃（YASUHARA, AKIRA）

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：６０２５６６２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：n成分絡み目Lのミルナー不変量は，{1，2，...，n}の元を項にもつ有限数列に対応して定義される．ミルナー不変量と他の不変量の関係を調べる事は，結び目（絡み目）理論において，とても重要な研究である．本研究では，ミルナー不変量とHOMFLYPT多項式の関係，ミルナー不変量と被覆絡み目から得られるミルナー不変量（被覆ミルナー不変量）との関係を与えた．

研究成果の概要（英文）：For an n-component link, the Milnor invariant is defined for any finite sequence of numbers in {1,2,...,n}. It is very important in Knot (Link) Theory to study relations between Milnor invariant and other invariants. In this research, we give relations between Milnor invariant and HOMFLYPT polynomial, and Milnor invarinats and Milnor invariants for covering link (covering Milnor invarinats).

研究分野：トポロジー

キーワード：ミルナー不変量　絡み目　有限型不変量　ストリング絡み目　クローバー絡み目　被覆絡み目

１．研究開始当初の背景

絡み目とは３次元球面内の有向閉曲線の集合である．絡み目のミルナー不変量は，1950年代にミルナー [4, 5] により定義された不変量である．n 成分絡み目 L のミルナー不変量は，{1, 2, ..., n}の元を項にもつ有限数列 I に対応して定義され，$\mu_L(I)$と表される．また，数列 I の長さが k のとき，$\mu_L(I)$を長さ k のミルナー不変量と呼ぶ．絡み目のミルナー不変量は，その補空間の基本群から導かれる．その定義は，極めて代数的であり，現実的には計算が非常に困難であることから，世界中のさまざまな研究者がミルナー不変量の幾何的な解釈や，ミルナー不変量と他の扱いやすい位相的不変量との関係に関して研究を行ってきた．

特に，ミルナー不変量は基本群に由来する不変量であるので，同じ基本群に由来するアレキサンダー多項式との関係は，村杉[6]，スマイス[8]，トラルディー[9]，レヴィン[2]等により報告されている．しかし，これらの結果は，I = 123 や I = 1,...,1,2,...,2 という非常に特殊な場合のミルナー不変量をアレキサンダー多項式を用いて表したり，アレキサンダー多項式の次数 m の係数を長さ m のミルナー不変量の組み合わせで表すというものであった．つまり，一般の数列 I に関して，ミルナー不変量を他の不変量で表すという結果は知られていなかった．

これに対し，研究代表者とメイヨン氏[3]は，長さ k 以下のミルナー不変量が全て消えている絡み目の長さ 2k+1 までのミルナー不変量を，HOMFLYPT 多項式を用いて表すことに成功した．ミルナー不変量は $\mu(I)$は，数列 I より長さの短いミルナー不変量を法として定義されるので，この条件下では長さ k+1 のミルナー不変量は，整数値を取り，first nonvanishing ミルナー不変量と呼ばれ，特に重要な研究対象として扱われている．したがって，この結果は，任意の first nonvanishing ミルナー不変量を HOMFLYPT 多項式で表すことに成功しているという意味で重要な結果である．また，HOMFLYPT 多項式は，量子不変量としても知られているので，この結果は，ミルナー不変量という代数的な量を量子不変量で表すという点においても大変興味深い結果であると言える．

２．研究の目的

本研究課題では，論文[3]の結果を更に発展させることにより，絡み目のミルナー不変量を結び目の有限型不変量を用いて表すことを目標とする．

1990 年にハベガーとリンは，ストリング絡み目とそのミルナー不変量を定義した．ストリング絡み目とは，円柱の上底と下底に端点をもつ曲線の集合である．絡み目のミルナー不変量が必ずしも整数値を取らないのに対し，ストリング絡み目のミルナー不変量は常に整数値をとる．また，ストリング絡み目のミルナー不変量を介して絡み目のミルナー不変量を得ることができる．絡み目のミルナー不変量は有限型不変量ではないが，ストリング絡み目のミルナー不変量は有限型不変量であることが知られている．したがって，絡み目のミルナー不変量は，ストリング絡み目の“ある”有限型不変量をもちいて表すことができる．これは，単なる存在定理であり，重要な問題となるのはこのような有限型不変量を具体的に構成することである．

論文[3]においても，ストリング絡み目から結び目を抽出し，その結び目の HOMFLYPT 多項式を 用いて，具体的な有限型不変量を構成することに成功した．理想は，論文 [3]の方法を更に発展させて，ミルナー不変量が消えているという条件を外した結果を与えることであるが，この結果を得るには本研究期間は短すぎる．したがって，この目標を見据えつつ，本研究課題では，条件を改良する方向で，論文[3]の結果の拡張を試みることを目標にした．

一方，ポリヤックは論文[7]において，$\mu(123)$を具体的な有限型不変量で与えている．ポリヤックがこの論文の中で用いている，絡み目のガウス図式と呼ばれる表現を用いるアイデアは，研究代表者が[3]で用いたアイデアとは全く異なる．研究代表者は，このポリヤックの方法を発展させす方向でも研究を進めた．

３．研究の方法

本研究は研究代表者が単独で行った．研究を行う上で，何人かの研究者と研究交流を図ったが，彼らは研究協力者という位置づけではない．
数学の研究では「考える」ことが大部分を占める．数学における研究交流の意義は，異なる観点からの思考や新しい知識を得ることができることにある．

本研究では，国内外の研究者と交流をはかることにより，研究の進展をはかった．その為，本研究における研究費の大部分は旅費として用いた．主な研究交流は以下のとおりである．

（１）フランスのグルノーブル第１大学のジャン・バプテスト　メイヨン氏を訪問・招聘し研究交流をはかった．メイヨン氏とは，ここ数年共同研究を続けており，これまでにも

幾つかの共著論文も執筆している．メイヨン氏はミルナー不変量やクラスパー理論に関する知識が豊富で，今回の研究の進展にも大いに役立った．

（２）アメリカのジョージ・ワシントン大学で開催された国際研究集会とノースカロライナ大学で開催された国際研究集会に参加し，研究成果の発表及び，参加者との研究交流を行った．両研究集会には，アメリカだけでなく世界中から多数の研究者が参加し，活発な研究交流を計ることができた．

（３）本務校において，早稲田大学の和田康載氏，東京学芸大学のゲルビール・ベノワ氏，津田塾大学の宮澤治子氏を交えて，定期的にセミナーを行った．また，不定期にではあるが，東京学芸大学の田中心氏やゲルビール・ベノワ氏，津田塾大学の福原真二氏も本セミナーに参加した．

４．研究成果

（１）研究代表者は，Meilhan 氏との共同研究で，長さｋ以下のミルナー不変量が消えている絡み目の長さ 2k+1 までのミルナー不変量を HOMFLYPT 多項式で表すことに成功していた．また，長さ 2k＋2 においては，同じ結果が成立しないことも同時に示している．

長さ 2k+2 の場合に成立しない状況を精密に調べた結果，その差異をうまく抽出することに成功した．この結果，その差異を補うある種の補正項を加えることにより，長さ 2k+2 まで拡張することに成功した．ここで，補正項も HOMFLYPT 多項式から得られる不変量である．したがって，当初の目的である，絡み目のミルナー不変量を具体的な有限型不変量で表すということに一歩近づいた．この進展は，小さなものであるが，補正項で補うという新しい方向性を示せたという点では，大きな進展につながる可能性を秘めている．ここで得られた結果は，理化学研究所の小鳥居氏との共同研究の成果であり，共著論文を査読付き国際雑誌に発表した．

（２）補正項を補うという，新たな観点で研究の進展を試みたが，残念ながら期待した結果は得られなかった．

一方で，ミルナー不変量の性質を研究するため，クローバー絡み目と呼ばれる絡み目を用いた研究を行った．クローバー絡み目はアメリカの数学者レビン教授により絡み目のミルナー不変量の研究の為に定義されたものである．クローバー絡み目のリンク・ホモトピーと呼ばれる同値関係による分類をミルナー不変量を用いて（ある条件のもと）与える事に成功した．これにより，ミルナー不変量の幾何的特徴が得られたといえる．この結果は，早稲田大学の和田康載氏との共同研究の成果であり．共著論文を査読付き国際雑誌に発表した．また，この成果の発表をジョージ・ワシントン大学で開催された国際研究集会および山形で開催された研究集会で和田氏が成果発表を行った．

（３）和田氏との共同研究の続きで，被覆絡み目を用いて，ミルナー不変量の研究を行った．この研究は，ミルナー不変量を有限型不変量を用いて表すことと，深い繋がりはないが，ミルナー不変量自体を深く理解するために必要な研究である．主な成果として，ボロミアン絡み目の長さ k+1 のミルナー不変量と被覆絡み目の長さｋのミルナー不変量との間の関係式を与えることに成功した．この結果を繰り返し適用する事により，mod-2 ミルナー不変量を被覆絡み目の長さ２のミルナー不変量を用いて表す事ができる．長さ２のミルナー不変量は，絡み数とも呼ばれ，位数１の有限型不変量であることが知られている．ここで，ボロミアン絡み目とは，任意の真部分絡み目が自明な絡み目のことであり，ミルナー不変量の研究で，重要な研究対象となる絡み目の族のことである．ここで得られた結果は，和田氏らとの共同研究の成果であり，共著論文としてまとめた．この論文は，査読付き国際雑誌に掲載が決定している．さらに，ノースカロライナ州立大学で開催された国際研究集会で和田氏が成果発表を行った．

＜引用文献＞

[1] N. Habegger and X.S. Lin, The classification of links up to link-homotopy, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 389-419.

[2] J. Levine, A factorization of the Conway polynomial, Comment. Math. Helv. 74 (1999), 27-52.

[3] J.B. Meilhan and A. Yasuhara, Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial, Geom. Topol. 16 (2012), 889-917.

[4] J. Milnor, Link groups, Ann. of Math. (2) 59 (1954), 177-195.

[5] J. Milnor, Isotopy of links, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280-306, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[6] K. Murasugi, On Milnor's invariant for links, Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), 94-110.

[7] M. Polyak, On Milnor's triple linking number, C. R. Acad. Sci. Paris Se. I Math. 325 (1997), 77-82.

[8] N. Smythe, Isotopy invariants of links and the Alexander matrix. Amer. J. Math., 89 (1967), 693-704.

[9] L. Traldi, Milnor's invariants and the completions of link modules, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 1, 401-424.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Natsuka Kobayashi, Kodai Wada and Akira Yasuhara, Milnor invariants of covering links, Topology and its Applications, 査読有, 印刷中

② Kodai Wada and Akira Yasuhara, Milnor invariants of clover links, International Journal of Mathematics, 査読有, 27 (2016), 1650108 (17 pages)

③ Yuka Kotorii and Akira Yasuhara, Milnor invariants of length 2k+2 for links with vanishing Milnor invariants of length ≤k, Topology and its Applications, 査読有, 184 (2015), 87-100

〔学会発表〕（計３件）

① 安原 晃, Welded long link の arrow calculus について, 2016 年 7 月, 東京女子大トポロジーセミナー, 東京女子大学

② 安原 晃, 絡み目の splitting number について, 2016 琉球結び目セミナー, 2016 年 2 月 20 日, 那覇市ぶんかテンブス館

③ 安原 晃, Welded string link のリンク・ホモトピー分類について, 2015 年 8 月 20 日, 拡大 KOOK セミナー2015, 神戸大学百年記念館

６．研究組織

(1)研究代表者
安原 晃（YASUHARA AKIRA）
津田塾大学・学芸学部・教授
研究者番号：60256625