

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 19 日現在

機関番号：12604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400082

研究課題名(和文) カンドル理論とはめ込み理論を用いたローズマン変形の研究

研究課題名(英文) Study of Roseman moves using quandle theory and immersion theory

研究代表者

田中 心 (Tanaka, Kokoro)

東京学芸大学・教育学部・准教授

研究者番号：70448950

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：曲面結び目図式のローズマン変形の独立性に関する研究を行った。まず、はめ込み理論を用いて、ブランチ点に関する変形の独立性を明らかにした。具体的には、ブランチ点のない球面結び目図式のペアで、ブランチ点に関わる変形が必ず現れるものを構成した。次に、カンドル理論を用いて、三重点に関する変形の独立性を明らかにした。具体的には、三重点のない球面結び目図式のペアで、三重点に関わる変形が必ず現れるものを構成した。

研究成果の概要(英文)：We studied independence of Roseman moves for surface-knot diagrams. Firstly, using immersion theory, we shed light on independence of Roseman moves including branch points. More precisely, we constructed a pair of two 2-knots such that any sequence of Roseman moves between them contains branch points. Secondly, using quandle theory, we shed light on independence of Roseman moves including triple points. More precisely, we constructed a pair of two 2-knots such that any sequence of Roseman moves between them contains triple points.

研究分野：数物系科学

キーワード：位相幾何 曲面結び目 ローズマン変形 カンドル はめ込み

1. 研究開始当初の背景

同じ曲面結び目を表す二つの図式は、ローズマン変形と呼ばれる七種類の局所変形で移りあうことが知られている。つまり、曲面結び目の図式的な性質を調べるには、ローズマン変形の深い理解が重要である。そこで本研究課題では、ローズマン変形各々が持っている性質の解明を目指すことにした。具体的には、同じ曲面結び目を表す二つの図式でブランチ点(or 三重点)を持たないものに対し、それらをつなぐローズマン変形の中にブランチ点(or 三重点)が現れるかどうかという問題を扱うことにした。それぞれの問題に関して、研究開始当初の背景は、以下の通りであった。

(1) ブランチ点に関しては、佐藤進(神戸大学)氏による結果が知られているだけの状況であった。具体的には、ブランチ点に関わる変形が必ず現れる「ブランチ点のない図式のペアで、種数が正のもの」が構成されていた。また、証明の中では、種数が正であることが本質的に用いられており、球面結び目に対してそのような例を構成するのは困難な状況であった。

(2) 三重点に関しては、Michal Jablonowski(University of Gdansk)氏による結果が知られているだけの状況であった。具体的には、三重点に関わる変形が必ず現れる「三重点のない図式のペアで、種数が正のもの」が構成されていた。また、証明の中では、種数が正であることが本質的に用いられており、球面結び目に対してそのような例を構成するのは困難な状況であった。

2. 研究の目的

以上の背景を踏まえ、球面結び目に対する「ローズマン変形の独立性」の考察を目的とした。具体的には、以下の二つを目的とした。

(1) ブランチ点のない球面結び目図式のペアで、ブランチ点に関わる変形が必ず現れるものを構成する。

(2) 三重点のない球面結び目図式のペアで、三重点に関わる変形が必ず現れるものを構成する。

3. 研究の方法

以上の目的を踏まえ、代数的手法(カンドル・ラック理論など)や幾何的手法(埋め込み・はめ込み理論など)を用いて研究を行った。具体的には、以下の方法で研究した。

(1) Smale による「球面の裏返し」には、四面体変形が奇数回現れることを示した。議論の過程では、4次元空間内の余次元1のはめ込みや、5次元空間内の余次元2の埋め込みなどの幾何的な状況を考察した。その応用とし

て、ブランチ点のない球面結び目図式のペアで、ブランチ点に関わる変形が必ず現れるものを構成した。

(2) カンドルの公理を崩した新しい代数系を定義し、三重点に関わる変形で変化し得る図式の不変量を得た。その応用として、三重点のない球面結び目図式のペアで、三重点に関わる変形が必ず現れるものを構成した。

4. 研究成果

以上を踏まえ、本研究課題の成果を述べる。なお、(1)と(2)は当初想定していた成果に近く、(3)から(6)は派生して得られた成果である。

(1) ブランチ点に関するローズマン変形に関して、はめ込み理論が有力な道具であることが分かった。具体的には、球面の裏返し、曲面結び目図式のローズマン変形の列には持ち上がらないことを証明した。また、任意の(ブランチ点のない)球面結び目図式に対して、同じ球面結び目を表す(ブランチ点のない)図式で、それらのローズマン変形列の中にブランチ点に関わる変形が必ず現れるものを構成した。これは、高瀬将道(成蹊大学)氏との共同研究である。

(2) 三重点に関するローズマン変形に関して、カンドル理論が有力な道具であることが分かった。具体的には、任意の(三重点のない)球面結び目図式に対して、同じ球面結び目を表す(三重点のない)図式で、それらのローズマン変形列の中に三重点に関わる変形が必ず現れるものを構成した。また、球面結び目図式のペアで、四面体変形が必ず現れる図式のペアを構成することもできた。これは、大城加奈子(上智大学)氏・河村建吾(大阪市立大学)氏との共同研究である。

(3) チャート理論を用いた Lefschetz ファイバー空間の研究を行った。具体的には、チャートの言葉で符号数を計算する公式を得た。また応用として、ファイバー和に関する安定化定理を得た。チャート理論を援用することで、自己交叉数の等しい切断の存在を仮定しなくてもよくなることは、本研究の特筆すべき点である。これは、遠藤久顕(東京工業大学)氏・鎌田聖一(大阪市立大学)氏・長谷川功(厚生労働省)氏との共同研究である。

(4) Khovanov ホモロジーについて成果を得た。Bar-Natan は、Khovanov ホモロジーの幾何的定式化を行い、その中で三種類の局所関係式を定義した。それらの局所関係式は、Khovanov が用いた Frobenius 代数が満たす代数的な関係式を、幾何的に言い換えたものと捉えられる。本研究では、三種類の局所関係式のうち、トーラス関係式が不要であ

ることを示した。これにより、より広い圏で不変量を定義できるようになったが、どの程度強くなったのかについては今後の課題である。

(5) カンドルの公理から「結び目の枠」に関する性質を落とした代数系として、ラックが知られていた。ラックを用いて曲面結び目図式の彩色を考えても、図式がブランチ点を持つと自明な彩色しか持たない。一方で、 S^1 の 2 次ホモトピー群が消えていることから、球面結び目の枠は一意的であることが知られていた。つまり、球面結び目に限れば、ラックを用いた不変量が構成できてもおかしくない状況であった。本研究では、実際にその推察が正しいことを示した。具体的には、ブランチ点を持たない図式のみを考えることにより、ラック彩色数は球面結び目の不変量であることを示した。また、ラック彩色数を用いて、(正種数の)曲面結び目図式のペアで、ブランチ点に関わる変形が必ず現れる図式のペアを構成することもできた。これは、大城加奈子(上智大学)氏との共同研究である。

(6) カンドルコサイクル不変量について成果を得た。具体的には、Carter-Elhamdadi-Saito らによって定義された「ねじれカンドルコサイクル不変量」と、Cheng-Gao らによって定義された「正カンドルコサイクル不変量」の両者を、影カンドルコサイクル不変量として統一的に解釈する方法を与えた。これは、鎌田聖一(大阪市立大学)氏・Victoria Lebed(Trinity College Dublin)氏との共同研究である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Masamichi Takase, Kokoro Tanaka,
Regular-equivalence of 2-knot and
sphere eversions,
Mathematical Proceedings of the
Cambridge Philosophical Society, 査読有
161, No.2, (2016), 237–246.

Kengo Kawamura, Kanako Oshiro, Kokoro Tanaka,
Independence of Roseman moves
including triple points,
Algebraic & Geometric Topology, 査読有
16, No.4, (2016), 2443–2458.

Hisaaki Endo, Seiichi Kamada, Isao Hasegawa, Kokoro Tanaka,
Charts, signatures, and

stabilizations of Lefschetz
fibrations,
Geometry & Topology Monograph, 査読有
19, (2015), 237–267.

Kokoro Tanaka,
A note on the local relations in
geometric formalism of Khovanov
homology theory,
Journal of Knot Theory and Its
Ramifications, 査読有
25, (2015), 1620001[4 pages].

Oshiro Kanako, Kokoro Tanaka,
On rack coloring for surface-knot
diagrams without branch points,
Topology and its Applications, 査読有
196, (2015), 921–930.

Seiichi Kamada, Victoria Lebed, Kokoro Tanaka,
The shadow nature of positive and
twisted quandle cocycle invariants of
knots,
Journal of Knot Theory and Its
Ramifications, 査読有
24, No.10, (2015), 1540001[15 pages].

[学会発表](計 10 件)

田中 心,
バイカンドル彩色について,
研究集会「2016 年度琉球結び目セミナー」,
2016 年 12 月 17 日–18 日,
那覇市伝統工芸館会議室(沖縄県那覇市).

田中 心,
The canonical genus of Whitehead
doubles of non-prime alternating
knots,
KOOK-TAPU Workshop of Knots in
Tsushima Island,
2016 年 9 月 6 日–8 日,
TIARA[下対馬離島開発センター](長崎県
対馬市).

田中 心,
Coherent regions of special diagrams
of a knot,
研究集会「拡大 KOOK セミナー2016」,
2016 年 8 月 22 日–25 日,
大阪電気通信大学(大阪府寝屋川市).

田中 心,
Independence of Roseman moves for
surface-knot diagrams,
東大数理トポロジー火曜セミナー,
2016 年 5 月 24 日, 東京大学大学院数理

科学研究科(東京都目黒区).

田中 心,
有向結び目図式の非同調領域数の評価について,
2016 琉球結び目セミナー,
2016年2月20日-21日,
那覇市伝統工芸館会議室(沖縄県那覇市).

田中 心,
The canonical genus of Whitehead doubles of non-prime alternating knots,
Knots in Washington XLI,
2015年12月4日-6日,
George Washington University,
Washington DC(USA).

田中 心,
Roseman 変形の独立性について,
東京女子大学トポロジーセミナー,
2015年11月28日,
東京女子大学(東京都杉並区).

田中 心,
多重共役カンドルのホモロジーについて,
研究会「ハンドル体結び目とその周辺VII」,
2014年10月4日-5日,
奈良女子大学(奈良県奈良市).

田中 心,
Regular-equivalence of 2-knot diagrams and sphere eversions,
A Satellite Conference of Seoul ICM 2014: Knots and Low Dimensional Manifolds,
2014年8月22日-26日,
BEXCO Convention & Exhibition Center II, Busan(Korea).

田中 心,
On n-almost positive adequate links,
2014 琉球結び目セミナー,
2014年6月21日-22日,
那覇市伝統工芸館会議室(沖縄県那覇市).

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:

種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.u-gakugei.ac.jp/~kotanaka/>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
田中 心(Tanaka Kokoro)
東京学芸大学・教育学部・准教授
研究者番号: 70448950

(2) 研究分担者 ()

研究者番号:

(3) 連携研究者 ()

研究者番号:

(4) 研究協力者 ()