様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００８５

研究課題名（和文）幾何構造を保つ群作用の剛性の研究

研究課題名（英文）Rigidity problem on group actions with an invariant geometric structure

研究代表者
浅岡　正幸（Asaoka, Masayuki）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：１０３１４８３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：階数1リー群SO(n,1) (n>2)に関わるある群作用の局所剛性を得た．また，以前に得た球面上のある共形的な群作用の変形の記述で用いた手法の応用として，トーラス上のある幾何構造を保つ作用の変形の記述を得ることができた．
部分双曲系における野生的な分岐の研究として，部分双曲系のトイモデルである1次元反復関数系において，自然な仮定の下で周期軌道の超指数的な増大が豊富に起きることを証明できた，また，同じ手法により「普遍力学系」と呼ばれる究極的に複雑な分岐現象も豊富に起きることも証明できた．

研究成果の概要（英文）：We obtained a local rigidity result for certain group action related to the rank-1 Lie group SO(n,1) with n>1
and a description of deformation of certain group action on the torus which preserves a geometric structure. The latter was an application of a method to show a rigidity result for a conformal action on the sphere.
We also proved the abundance of super-exponential growth of the number of periodic points and existence of universal dynamics for one-dimensional iterated function systems which satisfies some mild conditions. One-dimensional iterated function systems are toy models of partially hyperbolic dynamical systems. Hence, our result is a step to understand wild behavior of partially hyperbolic systems.

研究分野：力学系

キーワード：群作用　力学系

１．研究開始当初の背景

空間の持つ対称性は，空間上の群作用として定式化される．ある群作用が与えられたとき，その作用がどのような変形を許すかという「群作用の変形問題」の研究は，本研究課題の開始の 20 年ほど前から盛んになり，多くの興味深い結果が得られて来た．それらの結果のほとんどは局所等質空間の上の等質的な作用の変形に関するものであり，さらにその等質空間も階数２以上の半単純リー群と呼ばれるクラスのリー群に付随するものについての結果がほとんどであった．そのような状況の中で，代表者浅岡は，2010 年前後に階数１単純リー群のひとつである SL(2,R)に関わるある自然な群作用の変形の完全な分類に成功した．また，他の階数１単純リー群に関わる自然な作用のトイモデルであるようなある群作用の変形の記述にも成功している．作用素環論や幾何群論においては階数 2 リー群のもつ Property(T)と呼ばれる性質と対象の持つ剛性の間の密接な関係が様々な形で示されてきたが，それらの結果は階数 1 リー群に対しては適用できないことがほとんどであった．また，階数２以上の作用の剛性についても，その証明は双曲力学系の理論を用いる手法と調和解析を用いる手法があるが，これらの間の関連は明らかにはなっていなかった．

これらの剛性に関する結果の一方で，群作用を力学系としてみた場合には，力学系の持つダイナミクスがどのくらい複雑になりうるのかを知ることも群作用の変形を研究する上で重要である．代表者浅岡は以前に，力学系の持つ周期軌道の数の周期に対する増大度が病的に早い例が豊富に現れるような状況を研究しており，そのような現象が部分双曲系などの群作用の力学系とも密接に関係するような系に対しても起きうるのかという問題にも興味を持っていた．

２．研究の目的

本研究課題の目的は，離散群，もしくはリー群の滑らかな作用の剛性問題や変形問題について，作用で保存される幾何構造との関連を解明し，それとともに新しい手法の開発や新しい例の構成を行うことである．より具体的には以下の三つを目的とする．

(A) 等質的な群作用の剛性と作用が保つ幾何構造との関連の解明．
(B) 力学系，特に部分双曲的な力学系において起こりうる複雑な分岐とそのメカニズムの解明
(C) 剛性を持つ新しい作用や，剛性を引き起こす新しいメカニズムの発見

以下，それぞれについてより詳しく述べる．

(A) 上の「研究当初の背景」でも述べたように，これまでに知られている剛性を持つ群作用や，変形が有限次元のパラメータで完全に記述できるような作用のほとんどは等質空間上のリー群の等質的な作用であり，何らかの幾何構造を保存する．等質的な群作用の剛性を示す主な手法として，双曲力学系の理論を応用する手法と，調和解析などを用いて変形のモジュライに関わるなんらかのコホモロジーの消滅を示す手法の二つがあるが，どちらも多くの場合，変形や剛性を考える群作用が保っている幾何構造に関係する量が証明の過程で重要となる．本研究課題では，幾何構造が作用の剛性においてどのような役割を果たしているかを解明すること，またそこで得られた知見を，いまだ適切な取り扱い方が知られておらず未解決なままになっている階数１単純リー群に関わる群作用の剛性問題を解決することである．さらには，保存される幾何構造と「固さ」の関係を明らかにすることで，群作用の剛性の証明における，双曲力学系を用いる手法と調和解析的な手法の間にあると思われる関連を見出すことも本研究課題の目的の一つである．

(B) 剛性や変形の研究においては，剛性を持たない作用の変形としてどのような分岐現象が起こりうるのかを知ることも重要である．そのために本研究課題では，力学系の野生的な分岐現象についての研究を行うことも目的の一つとする．特にここでは，部分双曲性と呼ばれる弱い双曲性を持つ力学系で起きる分岐現象についての研究を行う．等質的な群作用でも，双曲性よりも弱い性質である部分双曲性と呼ばれる性質のみを持つことも多く，部分双曲的力学系ではどのような分岐が起き得るのかを知ることは，群作用の分岐を調べる上でも重要であると思われる．

(C) 上記の(A)(B)の研究を通して，群作用の剛性や変形，それらを引き起こすメカニズムについて新しい知見が得られると期待される．そのような新しい知識の応用として，剛性を持つ群作用のこれまでに知られなかった新しい例の構成を行うことも本研究課題の目標とする．

３．研究の方法

「目的」で述べた二つの目的(A)(B)(C)のそれぞれについて，どのような研究方法を用いて研究を行ったのかを述べる．

(A) まず，すでに知られている剛性に関する結果を再解釈することで，幾何構造が剛性の証明にどのように関わっているのかを調べた．特に，階数１リー群の基本的な例である SL(2,R)に関わる群作用は，具体的な記述がしやすく，様々な手法で剛性に関わる結果が

得られているので，この作用について特に詳細に検討し，いくつかの結果の別証明を試みた．

一方，リー群の多様体への局所自由な作用はその軌道が葉層構造をなし，作用の剛性の問題は軌道葉層の剛性の問題とパラメータ剛性の問題に分割される．軌道葉層の剛性と幾何構造の関連としては，葉層の特性類の変形が幾何構造に関わる量で記述されるという結果が知られていたので，その結果と軌道葉層の剛性問題との関連を探った．

(B) 野生的な分岐現象として近年注目を集めている現象の一つに周期点の数の超指数的な増大というものがある．この現象を引き起こすメカニズムとしてこれまで知られていたものはホモクリニック接触によるものであり，（中心方向が 1 次元である）部分双曲的な力学系では生じないメカニズムであった．部分双曲系でも周期点の超指数的な増大が起きるかどうかは，群作用の分岐の観点だけでなく，力学系理論の問題としても興味深いものである．そこで，野生的な分岐現象の解明の手がかりとして，部分双曲系における周期点の増大度の問題に挑んだ．その際，部分双曲系をいきなり扱うのは難しいため，そのトイモデルである１次元反復関数系での類似の問題を考察した．その過程で「普遍力学系」という究極的な複雑さを持つ分岐現象が，反復関数系でも観測される可能性がでてきたため，その定式化と存在の証明にも挑んだ．

(C) 作用の持つ拡大性が，変形の保つ幾何構造を統制していると見られるモデルを以前に，球面上の作用として構成していたので，そのメカニズムをより深く理解するために，その証明の手法を他の作用の変形問題に応用した．その後，剛性を持つ新しい作用の発見に挑んだ．

４．研究成果

「目的」の(A)(B)(C)のそれぞれについて得られた成果を述べる．

(A) SL(2,R)に関わる群作用の剛性の新しい証明を得ることができた．これまで知られている手法は，摂動された作用も何らかの幾何構造を保つことを幾何構造に付随するテンソル量の消滅を用いて示すものがほとんどであったが，今回得た証明方法は，作用の保つ拡大性から作用に付随するあるコサイクルの有限階のジェットの様子で決まってしまうことを観察し，さらにそのようなジェットが幾何構造を保存するもので実現されることを示すというものである．

この SL(2,R)に関わる作用について得られた知見を用いて，階数１のその他のリー群に関わる群作用の剛性問題の解決を目指したが，残念ながら解決には至らなかった．階数 1 のその他のリー群に対しても，その作用の拡大性から，作用に付随するコサイクルの有限回ジェットの様子で決まってしまうことを示すことはできるのだが，これらの場合には，高次元特有の複雑さから，そのようなジェットが幾何構造を保つようなもので実現できることを示すところに到達することができなかった．SL(2,R)の場合とは異なり作用する群がより多くの関係を持つので，このアプローチで問題を解決するには，それをより積極的に使う必要があるのかもしれない．

別なアプローチとして，変形複体のコホモロジーの消滅を調和解析的な手法で示すことで，まず無限小変形の自明性を示してから剛性を示すという方法も試みた．その結果として，無限小変形の計算における幾つかの進展が得られたが，無限小変形の自明性を証明するにはいたらなかった．しかし，力学系的な手法を用いることで，階数１リー群に関わる別な群作用の局所剛性についての結果を得ることに成功した．この結果が扱っているリー群 SO(n,1) (n>2)が関係するような群作用では，初めてその剛性が証明された例となり，大きな進展であると同時に，階数１特有の問題の難しさも明らかになった．

(B) 部分双曲系のトイモデルである１次元反復関数系において，自然な仮定の下で周期軌道の超指数的な増大を示す系が豊富にあることを証明することができた．我々のおいた仮定は具体的な条件として記述され，与えられた系がその条件を満たすことを検証するのはそれほど難しくない．そのため，工学や物理学などに現れるモデルに我々の結果が適用できるかどうかを調べることは興味深いと思われる．

また，我々の研究の帰結として，力学系の C^r 級摂動に関する分岐現象が，$r=1,2,3$ の場合で異なる様相を示すことも明らかになった．これまで知られている分岐現象のほとんどは，力学系の持つ１階微分に関わる量の退化が起源であるものだった．しかし，我々の結果から，力学系の持つ 2 階微分，3 階微分のもつ情報がその分岐の複雑さに本質的に関わる場合があることが明らかになった．こうした高階微分の情報の分岐現象の複雑さへの寄与の発見は，分岐理論に新しい視点を与えるものである．また，我々の考えた状況においては，4 階以上の高階微分の情報は分岐の複雑さには寄与せず，どこまでの高階微分の情報が分岐の複雑さに寄与しうるのか，という新しい問題も我々の結果から生まれている．

1 次元反復関数系において周期軌道の数の超指数的な増大を示す系の豊富さを証明する際に用いられた手法を，力学系の分岐に関する他の問題に応用することで，「普遍力学系」を持つ１次元反復関数系が豊富にあることを証明することができた．普遍力学系は，

反復合成を考えることですべての１次元反復写像系を近似しうるような系で，特にその分岐においては１次元反復関数系で起こりうる分岐現象が全て起きる．そのような系の存在は，力学系の分岐を理解する試みの一つの限界を示すものであり，１ 次元反復関数系という一見単純に見える系で普遍力学系の存在を示したことのインパクトは大きい．

１ 変数反復関数系におけるこれらの結果は，ランダム力学系や制御理論の観点からも興味深いものであり，それらの分野の研究者から強い関心を寄せられた．周期軌道の数の長周期的増大に関する結果の帰結として，周期軌道の数の増大度という１次元反復関数系の複雑さを測る基本的な量について，「ほとんどすべて」のランダムサンプリングにおける周期点の増大度と，増大度の期待値の振舞いが異なるという奇妙な状況が豊富に起こりうるということが導かれる．このような「ほとんどすべての振舞い」と「振舞いの平均」の乖離はランダム力学系の数値解析の正当性に関する重要な問題を孕んでおり，そのような問題を顕在化する例を構成できたことはランダム力学系に対する大きな貢献となったと考えている．

(C) 代表者が以前示した，球面上のある共形構造を保つ作用の変形の記述に関する結果を，トーラス上のある共形構造とは異なる幾何構造を保つ作用の変形の記述に応用した．その結果として，群作用の幾何構造と群自体の持つ構造の関連についての知見を得ることができた．実際，このトーラス上の作用の例も円周上の射影構造の「積」として記述される幾何構造である．この場合も SL(2,R)に関わる作用の場合と同様に，作用の持つある種の拡大性により，作用がその大域不動点の周りでの有限階ジェットの振舞いで決定されてしまうことが，作用の変形の記述の鍵となっている．作用の持つ拡大性が，作用の変形において何らかの幾何構造が保たれることに寄与していることがここでも示唆されている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ３件）

1. Masayuki Asaoka, Rigidity certain solvable actions on the torus, Geometry, Dynamics, and Foliations 2013, Advanced Studies in Pure Mathematics 72, 269-281. To appear.（査読有）

2. Masayuki Asaoka, Katsutoshi Shinohara, and Dmitry Turaev, Degenerate behavior in non-hyperbolic semigroup actions on the interval: fast growth of periodic points and universal dynamics, Math. Ann., (2016), electric.（査読有）

3. Masayuki Asaoka, Local rigidity of homogeoenous actions of parabolic subgroups of rank-one Lie groups, J. Modern Dynamics, Vol. 9(2015), 191-201.（査読有）

〔学会発表〕（計 5 件）

1. 浅岡正幸, Fast growth of the number of periodic points and unversal dynamics in semigroup actions on the interval, ランダム力学系理論とその応用 (2015), 2015 年 9 月 30 日．京都大学数理解析研究所(京都市)
.

2. 浅岡正幸, Universal dynamics in one-dimensional (semi)groups, Foliations and Diffeomorphism Groups 2014, 2014 年 10 月 22 日，東京大学玉原国際セミナーハウス（沼田市）．

3. Masayuki Asaoka, Arbitrary growth of the number of periodic points and universal dynamics in one-dimensional semigroups, Workshop on Theory and Applications of Random/Non-autonomous Dynamical Systems, 2014 年 9 月 9 日, Imperial College London, London (英国).

4. Masayuki Asaoka, Rigidity of certain solvable actions on the tori, Workshop on Geometry and Dynamics of Foliations, 2014 年 9 月 4 日, ICMAT, Madrid (スペイン).

5. Masayuki Asaoka, Arbitrary growth of the number of periodic points in one dimensional semigroups. ICM satellite conference on Dynamical Systems and Related Topics, 2014 年 8 月 11 日, Chungnam National University, Daejeon (韓国).

〔図書〕無し

〔産業財産権〕無し

〔その他〕　無し

６．研究組織
(1)研究代表者
浅岡　正幸（Masayuki Asaoka）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10314832